কণিক সেকশন

স্থানাঙ্ক ও ঘন

জ্যামিতি

শ্রীযামিনীমোহন কর, এম. এ.

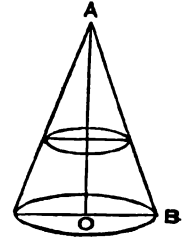
আশুতোষ কলেজের গণিত-শাস্ত্রের অধ্যাপক

প্রথম সংস্করণ—ভাদ্র, ১৩৫৭
প্রকাশক—শচীন্দ্রনাথ মুখোপাধ্যায়,
বেঙ্গল পাবলিশার্স,
১৪, বঙ্কিম চাটুজ্জে ষ্ট্রীট,
কলিকাতা—১২
প্রচ্ছদপট-পরিকল্পনা—
আশু বন্দ্যোপাধ্যায়
মুদ্রাকর—কার্ত্তিক চন্দ্র পাণ্ডা
"মুদ্রণী"
১৯বি, নরেন্দ্র সেন স্কোয়ার
কলিকাতা
ব্লক ও প্রচ্ছদপট মুদ্রণ—
ভারত ফোটোটাইপ ষ্টুডিও
বাঁধাই—বেঙ্গল বাইণ্ডার্স

মূল্য তিন টাকা

কনিক সেকশন

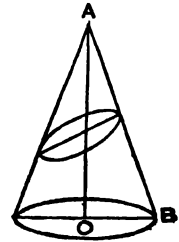
সূচনা

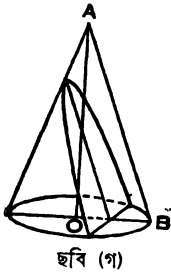
মনে কর AOB একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যাহার $\angle AOB =$ এক সমকোণ। যদি AOকে অক্ষ করিয়া এই ত্রিভুজটিকে ঘোরান হয়, তবে যে পৃষ্ঠ (surface) উৎপন্ন হইবে, তাহাকে সমকোণী বা লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু (right-circular cone) বলে। AOকে শঙ্কুর অক্ষ বলে। এই ঘোরার ফলে OB একটি বৃত্ত উৎপন্ন করে। এই বৃত্তকে সমকোণী শঙ্কুর ভূমি (base) বলে। ভূমির কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্দ্ধ OB. AOB ত্রিভুজের অতিভুজ ABএর বিভিন্ন অবস্থান দ্বারা পৃষ্ঠ উৎপন্ন হয় বলিয়া, ইহার নাম উৎপাদক রেখা (generating line).

ছবি (ক)

অক্ষের সহিত সমকোণ করিয়া যদি কোন সমতল শঙ্কুকে ছেদ করে, তবে সেই ছেদকে লম্ব ছেদ বলে। সকল লম্ব ছেদ বৃত্ত। ছবি (ক) দেখ।

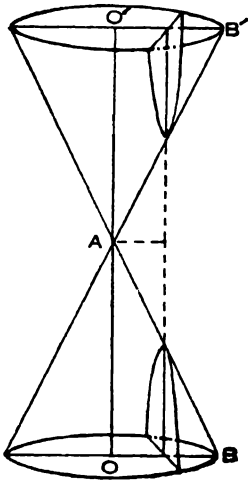
অক্ষের সহিত সমকোণ ব্যতিরেক অপর কোন কোণ করিয়া যদি কোন সমতল শঙ্কুকে ছেদ করে, তবে সেই ছেদকে বক্রছেদ বলে।

যদি এই ছেদ বদ্ধ বক্র (closed curve) হয়, তবে ছেদকে **উপবৃত্ত** (ellipse) বলে। ছবি (খ) দেখ।

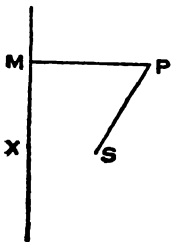
যদি ছেদের সমতল কোন উৎপাদক রেখার সমান্তরাল হয়, তবে সেই ছেদকে **অধিবৃত্ত** (parabola) বলে। ছবি (গ) দেখ।

ছবি (খ)

যদি কোন ছেদের সমতল অক্ষের সমান্তরাল হয় তবে ছেদকে **পরাবৃত্ত** (hyperbola) বলে। ছবি (ঘ) দেখ।

ছবি (গ)

যেহেতু শঙ্কুর বিভিন্ন ছেদ হইতে বিভিন্ন বক্র পাওয়া যাইতেছে, সেইজন্য ইহাদের শঙ্কু-ছেদ অথবা কনিক সেকশন বলা হয়।

কোন সমতলের উপর একটি স্থির বিন্দু ও একটি স্থির সরল রেখা দেওয়া আছে। সেই সমতলে যদি একটি বিন্দু এমন ভাবে চলে যে, স্থির বিন্দু হইতে তাহার দূরত্বের এবং স্থির সরল রেখা হইতে তাহার দূরত্বের অনুপাত ধ্রুব, তবে বিন্দুর সঞ্চারপথকে **কনিক** বলে। এই স্থির বিন্দুটির নাম **নাভি** (focus) এবং স্থির সরল রেখাটির নাম **নিয়ামক** (directrix). ধ্রুব অনুপাতকে বলে কনিকের **উৎকেন্দ্রতা** (eccentricity), এবং ইহা সর্ব্বদা ধনাত্মক ধরা হয়।

ছবি (ঘ)

এই উৎকেন্দ্রতা এককের সমান হইলে কনিককে **অধিবৃত্ত** (parabola) বলে; উৎকেন্দ্রতা একক অপেক্ষা কম হইলে **উপবৃত্ত** (ellipse) এবং একক অপেক্ষা বড় হইলে **পরাবৃত্ত** (hyperbola) বলে। দেখা যাইতেছে, কনিক সমূহ শঙ্কুর বিভিন্ন ছেদ। সেইজন্য কনিকের অপর নাম শঙ্কু-ছেদ বা কনিক সেকশন।

মনে কর কোন সমতলস্থ স্থির বিন্দু অর্থাৎ নাভি S, এবং স্থির সরল রেখা অর্থাৎ নিয়ামক MX; এবং মনে কর চলমান বিন্দু P.

যদি PS যোগ করা যায় এবং P হইতে নিয়ামকের উপর PM লম্ব আঁকা হয়, তবে $\frac{PS}{PM}$ ধ্রুব হইলে P বিন্দুর সঞ্চারপথ কনিক হইবে। $\frac{PS}{PM}$ কনিকের উৎকেন্দ্রতা। যদি $\frac{PS}{PM}=1$, অর্থাৎ $PS=PM$ হয়, তবে কনিকটি অধিবৃত্ত হইবে। যদি $\frac{PS}{PM}<1$, অর্থাৎ $PS<PM$ হয়, তবে কনিকটি উপবৃত্ত হইবে। যদি $\frac{PS}{PM}>1$, অর্থাৎ $PS>PM$ হয়, তবে কনিকটি পরাবৃত্ত হইবে।

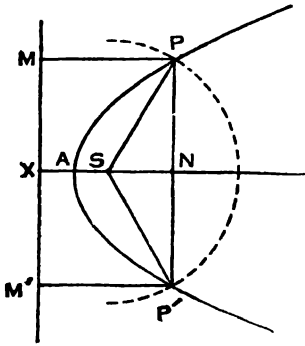
প্রথম অধ্যায়

অধিবৃত্ত

সংজ্ঞা : কোন সমতলের উপর যদি একটি বিন্দু এমন ভাবে নড়িয়া বেড়ায় যে, সেই সমতলস্থ একটি স্থির বিন্দু হইতে এবং একটি স্থির সরল রেখা হইতে তাহার দূরত্ব সমান হয়, তবে সেই বিন্দুর সঞ্চার পথকে **অধিবৃত্ত** বলে।

উপপাদ্য—১

অধিবৃত্তের নাভি ও নিয়ামক দেওয়া আছে, বক্র অঙ্কন কর।

(Given the focus and the directrix of a parabola, draw the curve.)

মনে কর অধিবৃত্তের নাভি S এবং নিয়ামক MXM′. বক্র অঙ্কন করিতে হইবে, অর্থাৎ বক্রস্থ বিন্দু-সমূহের অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে।

নাভি S হইতে নিয়ামক MXM′এর উপর SX লম্ব আঁক। SXকে A বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। যেহেতু SA = AX, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে A বিন্দু বক্রের উপর অবস্থিত। AS অথবা বর্দ্ধিত ASএর উপর যে কোন বিন্দু N লইয়া ANএর উপর PNP′ লম্ব আঁক। এইবার Sকে কেন্দ্র করিয়া এবং XN ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক। মনে কর, এই বৃত্তচাপ PNP′কে P এবং P′এ ছেদ করিল। PS এবং P′S যোগ কর এবং P এবং P′ হইতে নিয়ামকের উপর যথাক্রমে PM এবং P′M′ লম্ব আঁক।

এখন, যেহেতু $PS = XN = PM$ এবং $P'S = XN = P'M'$, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে P এবং P' বিন্দুদ্বয় বক্রের উপর অবস্থিত।

এইভাবে Nএর বিভিন্ন অবস্থান লইলে P এবং P'এর বিভিন্ন অবস্থান পাওয়া যাইবে। কিন্তু P এবং P' বক্রের উপর অবস্থিত। সুতরাং বক্রস্থ বিভিন্ন বিন্দু পাওয়া যাইবে। শুধু হাতে বিন্দুসমূহকে সংযোগ করিলে নির্ণেয় বক্র অর্থাৎ নির্ণেয় অধিবৃত্ত অঙ্কিত হইবে।

যদি N বিন্দু AX অথবা বর্দ্ধিত AXএর উপর লওয়া হয়, তবে XN সর্ব্বদাই SN অপেক্ষা ছোট হইবে। সুতরাং Sকে কেন্দ্র করিয়া এবং XN ব্যাসার্দ্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন করিলে PNP'কে ছেদ করিবে না। অতএব অধিবৃত্ত কেবল মাত্র A বিন্দুর ডানদিকে অর্থাৎ নাভির দিকে অবস্থিত। বিপরীত দিকে ইহার কোন অংশ থাকিতে পারে না।

সংজ্ঞা : নাভির মধ্য দিয়া যে সরল রেখা নিয়ামকের উপর লম্ব আঁকা হয়, তাহাকে কনিকের **অক্ষ** (axis) বলে। ছবিতে সরলরেখা AS অধিবৃত্তের অক্ষ।

যে বিন্দু অথবা বিন্দু সমূহতে অক্ষ কনিককে ছেদ করে, তাহাকে বা তাহাদের কনিকের **শীর্ষ** (vertex) বলে। ছবিতে A বিন্দু অধিবৃত্তের শীর্ষ।

কনিকের উপর অবস্থিত যে কোন দুইটি বিন্দুকে সরলরেখা দ্বারা সংযোগ করিলে তাহাকে কনিকের **জ্যা** (chord) বলে। যদি সেই জ্যা নাভির মধ্য দিয়া যায়, তবে তাহাকে **নাভিগ জ্যা** (focal chord) বলে। বক্রস্থ যে কোন বিন্দুর নাভিগ দূরত্ব বলিতে নাভি হইতে বিন্দুর দূরত্ব বুঝায়।

শীর্ষ অধিবৃত্তের **মূল বিন্দু** (origin) ; কনিকের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু হইতে অক্ষের উপর লম্ব টানিলে, সেই লম্বকে বিন্দুর **কোটি** (ordinate) বলা হয়, এবং মূল বিন্দু অর্থাৎ শীর্ষ হইতে লম্বের পাদদেশের দূরত্বকে বিন্দুর **ভুজ** (abscissa) বলে। এই ভুজ ও কোটিই বিন্দুটির স্থানাঙ্ক। ছবিতে P বিন্দুর ভুজ $= AN$ এবং কোটি $= PN$ অতএব ইহার স্থানাঙ্ক (AN, PN). PNP'কে **দ্বি-কোটি** (double ordinate) বলে।

যদি এমন কোন সরল রেখা আঁকা সম্ভব হয় যে, কোন বক্রের সেই রেখার

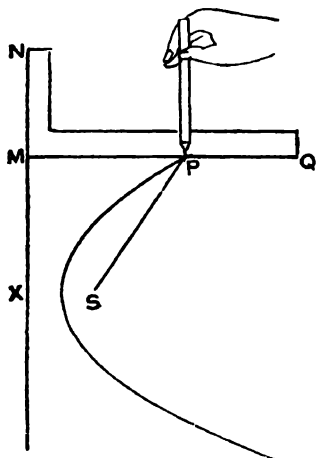
উপর লম্ব জ্যা সমূহ এই রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয়, তবে সেই সরলরেখাকে বক্রের প্রতিসাম্যের অক্ষ বলা হয়।

অধিবৃত্তের অক্ষই প্রতিসাম্যের অক্ষ।

ত্রিভুজদ্বয় PNS এবং PNS′এর মধ্যে $PS = PS'$, $\angle PNS = \angle P'NS =$ এক সমকোণ এবং SN সাধারণ বাহু। অতএব ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। সুতরাং $PN = P'N$.

কিন্তু PP′ অক্ষের উপর লম্ব যে কোন একটি জ্যা এবং SN ইহাকে দ্বিখণ্ডিত করিতেছে। অতএব এই অক্ষের উপর লম্ব সকল জ্যাকেই অক্ষ দ্বিখণ্ডিত করে। সুতরাং অধিবৃত্তের অক্ষই প্রতিসাম্যের অক্ষ।

যান্ত্রিক উপায়ে অধিবৃত্ত অঙ্কন:

মনে কর S নাভি এবং MX নিয়ামক। অধিবৃত্ত আঁকিতে হইবে।

Lএর মত দেখিতে NMQ একটি যন্ত্র লও। $\angle NMQ$ একটি সমকোণ। NMকে সর্ব্বদ নিয়ামকের সহিত ঠেকাইয়া রাখ। এইবার MQএর সমান একটি সূতা লইয়া এক প্রান্ত Qতে এবং অপর প্রান্ত Sএ বাঁধ। সূতা ঢিলা থাকিবে। সূতার মধ্যে একটি পেনসিল লাগাইয়া এমনভাবে সূতাকে টান কর যে সূতার PQ অংশ যেন যন্ত্রের MQ বাহুর সহিত ঠেকিয়া থাকে। এইবার যন্ত্রটিকে এমনভাবে সরাও যে যন্ত্রের অপর বাহু MN যেন নিয়ামকের সহিত ঠেকিয়া থাকে। তাহা হইলে পেনসিল P বিন্দুর সঞ্চার পথ অঙ্কন করিবে।

$MQ = PS + PQ = MP + PQ$; সুতরাং $PS = MP$.

অতএব P বিন্দুর সঞ্চার পথ একটি অধিবৃত্ত।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। অক্ষের সমান্তরাল কোন সরল রেখা অধিবৃত্তকে মাত্র একটি বিন্দুতেই ছেদ করে।

মনে কর সরল রেখা MP অক্ষের সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, MP অধিবৃত্তকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, মনে কর MP অধিবৃত্তকে Q বিন্দুতেও ছেদ করিতেছে। PS এবং SQ যোগ কর।

এখন P এবং Q অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া $PS = PM$ এবং $QS = QM$.

সুতরাং $QS = QM = QP + PM = QP + PS$; অর্থাৎ ত্রিভুজের দুইটি বাহুর যোগফল তৃতীয় বাহুর সমান। কিন্তু তাহা অসম্ভব।

অতএব, MP অধিবৃত্তকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

উদাঃ ২। অধিবৃত্তের নাভিগ-জ্যার অক্ষের উপর অভিক্ষেপ, জ্যার দুইটি অংশের অন্তরের সমান।

মনে কর PSP′ একটি নাভিগ-জ্যা। P এবং P′ হইতে যথাক্রমে PN এবং P′N′ অক্ষের উপর লম্ব টান। তাহা হইলে NN′ অক্ষের উপর PP′এর অভিক্ষেপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $NN' = PS - P'S$.

এখন P এবং P′ অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া $PS = PM = XN$ এবং $P'S = P'M' = XN'$.

অতএব $NN' = XN - XN' = PS - P'S$.

উদাঃ ৩। অধিবৃত্তের নাভিগ-জ্যার নিয়ামকের উপর অভিক্ষেপ নাভিতে এক সমকোণের সম্মুখীন হয়।

মনে কর PSP′ একটি নাভিগ-জ্যা। P এবং P′ হইতে নিয়ামকের উপর যথাক্রমে PM এবং P′M′ লম্ব টান। তাহা হইলে MM′ নিয়ামকের উপর PP′এর অভিক্ষেপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle MSM' =$ এক সমকোণ।

যেহেতু $PM = PS$, সুতরাং $\angle PMS = \angle PSM$; এবং যেহেতু PM এবং XS সমান্তরাল, সুতরাং $\angle PMS = \angle MSX$. অতএব $\angle PSM = \angle MSX$.

অনুরূপ ভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle P'SM' = \angle M'SX$.

সুতরাং $\angle PSM + \angle MSX + \angle XSM' + \angle M'SP'$

$= 2\ (\angle MSX + \angle XSM') =$ দুই সমকোণ।

অতএব $\angle MSM' =$ এক সমকোণ।

প্রশ্নমালা

১। নাভি ও শীর্ষ দেওয়া আছে, অধিবৃত্ত অঙ্কন কর।

২। শীর্ষ ও নিয়ামক দেওয়া আছে, অধিবৃত্ত অঙ্কন কর।

৩। নাভি ও অধিবৃত্তস্থ দুইটি বিন্দু দেওয়া আছে, অধিবৃত্ত অঙ্কন কর।

৪। নিয়ামক ও অধিবৃত্তস্থ দুইটি বিন্দু দেওয়া আছে, অধিবৃত্ত অঙ্কন কর। প্রমাণ কর যে, সাধারণতঃ দুইটি এইরূপ অধিবৃত্ত অঙ্কন করা সম্ভব। অঙ্কন কখন সম্ভব হইবে না?

৫। অধিবৃত্তের নাভি হইতে যে কোন বিন্দুর দূরত্ব নিয়ামক হইতে দূরত্ব অপেক্ষা অধিক হইবে যদি বিন্দু অধিবৃত্তের বাহিরে থাকে এবং ছোট হইবে যদি বিন্দু অধিবৃত্তের ভিতরে থাকে।

৬। অধিবৃত্তের যে কোন নাভিগ জ্যা, নাভি এবং নিয়ামক দ্বারা একই অনুপাতে যথাক্রমে অন্তঃ এবং বহির্বিভক্ত হয়।

৭। যে কোন অধিবৃত্তের যদি PSP′ কোন নাভিগ জ্যা হয় এবং PN ও P′N′ অক্ষের উপর লম্ব হয়, প্রমাণ কর যে, $AN \cdot AN' = AS^2$.

৮। যদি PSP′ যে কোন অধিবৃত্তের একটি নাভিগ জ্যা হয়, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{1}{AS}$.

৯। একটি প্রদত্ত বৃত্ত ও একটি প্রদত্ত সরল রেখাকে অপর একটি বৃত্ত সর্ব্বদা স্পর্শ করে; বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১০। একটি প্রদত্ত বিন্দু ও একটি প্রদত্ত সরল রেখা হইতে একটি বিন্দুর দূরত্বের যোগ অথবা বিয়োগফল ধ্রুব; প্রমাণ কর যে, বিন্দুটির সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত।

১১। যদি অধিবৃত্তের উপর P একটি বিন্দু হয়, এবং SPএর উপর SY একটি লম্ব টানা হয়, যাহা নিয়ামকে Y বিন্দুতে ছেদ করে, এবং PM যদি P বিন্দু হইতে নিয়ামকর উপর লম্ব হয়, তবে SPM কোণকে PY দ্বিখণ্ডিত করিবে এবং SMকেও লম্বভাবে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

১২। অধিবৃত্তের যে কোন নাভিগ জ্যাকে ব্যাস ধরিয়া বৃত্ত অঙ্কন করিলে নিয়ামককে স্পর্শ করিবে।

১৩। PSP′ অধিবৃত্তের একটি নাভিগ জ্যা এবং V ইহার মধ্য বিন্দু। Vএর মধ্য দিয়া VK অক্ষের সমান্তরাল টানা হইয়াছে এবং ইহা নিয়ামককে K বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, PKP′ এক সমকোণের সমান।

১৪। যদি কোন বৃত্ত প্রদত্ত একটি বিন্দুর মধ্য দিয়া যায় এবং প্রদত্ত একটি সরল রেখাকে স্পর্শ করে, তবে বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

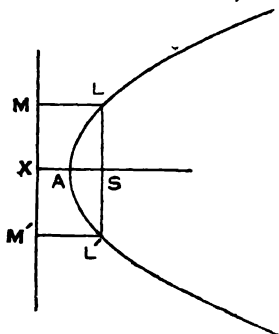
১৫। অধিবৃত্তের কোন নাভিগ জ্যার মধ্যবিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব টানিলে, লম্বের দৈর্ঘ্য জ্যার দৈর্ঘ্যের অর্দ্ধ।

১৬। অক্ষের উপর লম্ব একটি জ্যা দেওয়া আছে; আর একটি সমান্তরাল জ্যা নির্ণয় কর, যাহার দৈর্ঘ্য প্রদত্ত জ্যার দ্বিগুণ।

সংজ্ঞা ঃ অধিবৃত্তের যে নাভিগ জ্যা অক্ষের উপর লম্ব, তাহাকে **নাভিলম্ব** বা **লেটাস রেক্‌টাম** (latus rectum) বলে।

উপপাদ্য—২

অধিবৃত্তের নাভিলম্ব শীর্ষ হইতে নাভির দূরত্বের চতুর্গুণ।

(The latus rectum of a parabola is equal to four times the focal distance of the vertex.)

মনে কর অধিবৃত্তের নাভি S, নিয়ামক MX এবং অক্ষ AS; Sএর মধ্য দিয়া অক্ষের উপর লম্ব LSL′ জ্যা আঁক। তাহা হইলে LL′ অধিবৃত্তের নাভিলম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $LL' = 4AS$.

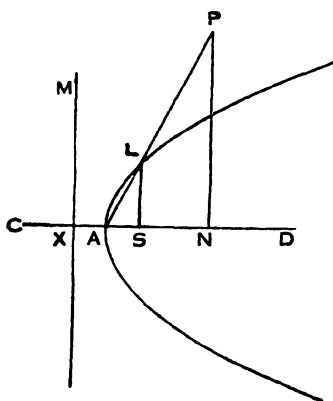
যেহেতু L এবং L′ অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত, স্থতরাং $LS = LM = XS$ এবং $L'S = L'M' = XS$.

আবার যেহেতু A অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত, স্থতরাং $AS = AX$,

অর্থাৎ $XS = 2AS$.

অতএব $LL' = 2XS = 4AS$.

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। একটি অধিবৃত্ত ও তাহার অক্ষ দেওয়া আছে; নাভি ও নিয়ামক নির্ণয় কর।

মনে কর অধিবৃত্ত আঁকা আছে এবং CD ইহার অক্ষ; তাহা হইলে যে বিন্দুতে CD অধিবৃত্তকে ছেদ করিতেছে অর্থাৎ A বিন্দু অধিবৃত্তের শীর্ষ। অক্ষের উপর যে কোন একটি বিন্দু N লও, এবং অক্ষের উপর PN লম্ব টান। $PN = 2AN$ করিয়া কাটিয়া লও। AP যোগ কর এবং মনে কর ইহা অধিবৃত্তকে L বিন্দুতে ছেদ করিল। L হইতে অক্ষের

উপর LS লম্ব টান। তবে S অধিবৃত্তের নাভি। অক্ষের উপর Sএর বিপরীত দিকে $AX = AS$ কাটিয়া লও। Xএর মধ্য দিয়া MX অক্ষের উপর লম্ব টান। তবে MX অধিবৃত্তের নিয়ামক।

প্রমাণ—সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় PNA এবং LSA সদৃশ; সুতরাং $\frac{PN}{AN} = \frac{LS}{AS}$. কিন্তু $PN = 2AN$, সুতরাং $LS = 2AS$.

অতএব LS নাভিলম্বের অর্দ্ধেক এবং S নাভি। সুতরাং MX নিয়ামক।

উদাঃ ২। প্রমাণ কর যে, $8AL^2 = 5XL^2$.

$AL^2 = AS^2 + LS^2 = AS^2 + 4AS^2 = 5AS^2$;

এবং $XL^2 = XS^2 + LS^2 = 4AS^2 + 4AS^2 = 8AS^2$,

অতএব $8AL^2 = 5XL^2$.

প্রশ্নমালা

১। অধিবৃত্তের উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর, যাহার কোটি নাভি-লম্বের সমান।

২। প্রমাণ কর যে, LAL′ ত্রিভুজের বহির্বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ $= \frac{5}{8}$ নাভিলম্ব।

৩। প্রমাণ কর যে, অধিবৃত্তের নাভিলম্বকে ব্যাস ধরিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করিলে তাহা নিয়ামককে অক্ষের সহিত নিয়ামকের ছেদ বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। [কঃ বিঃ 1944.]

৪। অধিবৃত্তের নাভিলম্ব দেওয়া আছে, অধিবৃত্ত অঙ্কন কর।

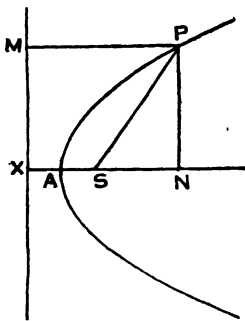
৫। অধিবৃত্তের এমন একটি দ্বি-কোটি নির্ণয় কর, যাহার দৈর্ঘ্য নাভিলম্বের দ্বিগুণ।

৬। কোটি PNএর উপর এমন একটি বিন্দু Q নির্ণয় কর, যাহাতে Qএর মধ্য দিয়া অক্ষের সমান্তরাল সরল রেখা অধিবৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করিলে, $QN + QR$ বৃহত্তম হইবে।

৭। যদি PSP′ একটি নাভিগ জ্যা হয়, এবং PM ও P′M′ যথাক্রমে P ও P′ বিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব হয়, প্রমাণ কর যে, $MX \cdot M'X = \frac{1}{4}$ (নাভিলম্ব)^2।

উপপাদ্য—৩

অধিবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দুর কোটির বর্গ নাভিলম্ব এবং বিন্দুর ভুজের গুণফলের সমান।

(The square of the ordinate of any point on a parabola is equal to the rectangle contained by the latus rectum and the abscissa of the point.)

মনে কর অধিবৃত্তের নাভি S, নিয়ামক MX এবং অক্ষ XAS; P বিন্দু হইতে অক্ষের উপর PN লম্ব টানা হইয়াছে, সুতরাং P বিন্দুব কোটি PN এবং ভুজ AN.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$PN^2 = 4AS \cdot AN.$$

ত্রিভুজ PNS সমকোণী, সুতরাং $PN^2 = PS^2 - SN^2 = PM^2 - SN^2$

$$= XN^2 - SN^2 = (AN + AX)^2 - (AN - AS)^2$$

$$= (AN + AS)^2 - (AN - AS)^2 = 4AS \cdot AN.$$

টীকা ঃ $PN^2 = 4AS \cdot AN = LL' \cdot AN$; সুতরাং $\frac{PN}{AN} = \frac{LL'}{PN}$, অতএব উপপাদ্যটিকে এইভাবেও প্রকাশ করা যায় ঃ—অধিবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দুর কোটি, নাভিলম্ব এবং বিন্দুর ভুজের মধ্যানুপাতী।

পুনরায়, যেহেতু প্রদত্ত অধিবৃত্তের জন্য 4AS অর্থাৎ নাভিলম্ব ধ্রুব, সুতরাং উপপাদ্যটি আর একভাবেও প্রকাশ করা যায় ঃ—অধিবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দুর কোটির বর্গ বিন্দুর ভুজের সহিত সরল ভেদে থাকে।

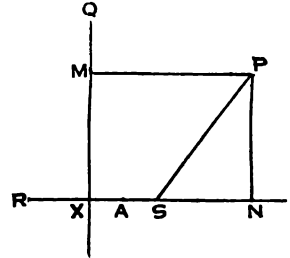
এখন ভুজ যদি ধনাত্মক হয়, তবে কোটির দুইটি সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত মান পাওয়া যাইবে; এবং ভুজ যদি ঋণাত্মক হয় তবে কোটির কোন বাস্তব মান পাওয়া যাইবে না। অতএব অধিবৃত্ত শীর্ষের কেবলমাত্র নাভির দিকেই

থাকিতে পারে বিপরীত দিতে থাকিতে পারে না, এবং অধিবৃত্তের অক্ষই প্রতিসাম্যের অক্ষ। পুনরায়, ভুজের মান যতই বাড়িতে থাকিবে, কোটির মানও বাড়িতে থাকিবে। অতএব অধিবৃত্ত উন্মুক্ত এবং অসীম বক্র।

বিপরীত উপপাদ্য

কোন সমতলের উপর যদি একটি বিন্দু এমনভাবে নড়ে যে, সেই সমতলস্থ কোন একটি প্রদত্ত সরল রেখার উপর লম্ব টানিলে সরল রেখা হইতে বিন্দুর দূরত্বের বর্গ এবং সেই রেখাস্থ এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে লম্বের পাদদেশের দূরত্ব সরল ভেদে থাকে, তবে বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত হইবে।

মনে কর চল বিন্দু P, প্রদত্ত সরল রেখা RN, এবং রেখাস্থ নির্দ্দিষ্ট বিন্দু A. P হইতে RNএর উপর PN লম্ব টানা হইয়াছে। দেওয়া আছে, $PN^2 = k.AN$, যেখানে k একটি ধ্রুবক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, P বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত।

RNএর উপর একটি বিন্দু S লও যাহাতে $AS = \frac{1}{4}k$ হয়। Sএর বিপরীত দিকে $AX = AS$ কাটিয়া লও। X বিন্দুর মধ্য দিয়া RNএর উপর লম্ব একটি সরল রেখা QX আঁক। PS যোগ কর এবং P হইতে QXএর উপর PM লম্ব টান।

এখন PNS একটি সমকোণী ত্রিভুজ, সুতরাং $PN^2 = PS^2 - SN^2$.

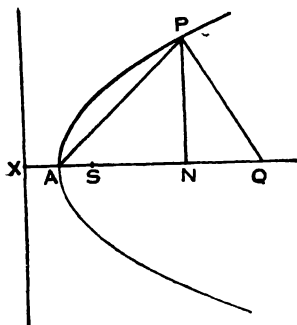
কিন্তু দেওয়া আছে $PN^2 = k.\ AN$;

সুতরাং $PS^2 - SN^2 = k.AN = 4AS.AN = XN^2 - SN^2 = PM^2 - SN^2$.

অতএব $PS = PM$.

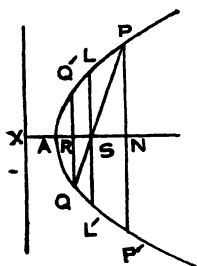
সুতরাং P বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত, যাহার নাভি S, নিয়ামক MX এবং শীর্ষ A.

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। শীর্ষগ জ্যা APএর উপর PQ লম্ব এবং Q অক্ষের উপর স্থিত; যদি N বিন্দু PN কোটির পাদদেশ হয়, প্রমাণ কর যে, NQ দৈর্ঘ্যে নাভিলম্বের সমান। [কঃ বিঃ 1933, '40.]

ত্রিভুজদ্বয় PNQ এবং PNA সদৃশ, কারণ
$\angle PNQ = \angle PNA =$ এক সমকোণ;
$\angle NPQ = \angle PAN$,
এবং $\angle PQN = \angle APN$

সুতরাং $\frac{PN}{NQ} = \frac{AN}{PN}$,

অর্থাৎ $PN^2 = NQ \cdot AN$
কিন্তু $PN^2 = 4AS \cdot AN$;
অতএব $NQ = 4AS =$ নাভিলম্ব।

উদাঃ ২। প্রমাণ কর যে, নাভিলম্ব যে কোন নাভিগ জ্যার দুই প্রান্তের দ্বিকোটির মধ্যানুপাতী। [কঃ বিঃ 1937.]

PSQ একটি নাভিজ্ঞ জ্যা এবং PNP' ও QRQ' যথাক্রমে P ও Q এর দ্বিকোটি। LL' অধিবৃত্তের নাভিলম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $PP' \cdot QQ' = LL'^2$.

P বিন্দুর ভুজ AN, কোটি PN এবং Q বিন্দুর ভুজ AR, কোটি QR.

সুতরাং $PN^2 = 4AS \cdot AN$ এবং $QR^2 = 4AS \cdot AR$

$\therefore \quad PN^2 \cdot QR^2 = 16AS^2 \cdot AN \cdot AR$

অর্থাৎ $PN \cdot QR = 4AS \cdot \sqrt{(AN \cdot AR)}$

কিন্তু $PN = \frac{1}{2}PP'$ এবং $QR = \frac{1}{2}QQ'$

সুতরাং $PP' \cdot QQ' = 16AS \cdot \sqrt{(AN \cdot AR)}$

এখন সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় PSN এবং QSR সদৃশ;

সুতরাং $\frac{SN}{SR}=\frac{PS}{QS}=\frac{XN}{XR}=\frac{XS+SN}{XS-SR}=\frac{2AS+SN}{2AS-SR}$

$\therefore\quad \frac{SN}{SR}=\frac{2AS+SN+SN}{2AS-SR+SR}=\frac{2AN}{2AS}=\frac{AN}{AS}$

পুনরায়, $\frac{SN}{SR}=\frac{2AS+SN-SN}{2AS-SR-SR}=\frac{2AS}{2AR}=\frac{AS}{AR}$

সুতরাং $\frac{AN}{AS}=\frac{AS}{AR}$, অর্থাৎ $AS^2=AN\cdot AR$

অতএব $PP'\cdot QQ'=16AS^2=(4AS)^2=LL'^2$

উদাঃ ৩। অধিবৃত্তের কোন বিন্দু Pএর কোটি PN ; অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা PNকে দ্বিখণ্ডিত করে এবং অধিবৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে ; বর্দ্ধিত NQ শীর্ষ A এর মধ্য দিয়া অক্ষের উপর লম্ব সরলরেখাকে T বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $3AT=2PN$.

[কঃ বিঃ 1943.]

মনে কর S অধিবৃত্তের নাভি। Q হইতে অক্ষের উপর QR লম্ব টান, তবে $QR=\frac{1}{2}PN$.

এখন ত্রিভুজদ্বয় NAT এবং NRQ সদৃশ ;

সুতরাং $\frac{AT}{QR}=\frac{AN}{RN}=\frac{AN}{AN-AR}$.

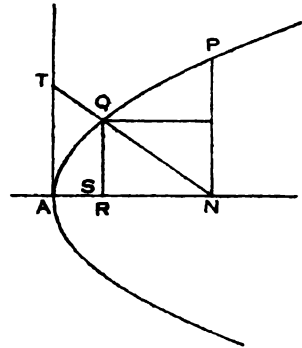
P এবং Q অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত; সুতরাং

$PN^2=4AS\cdot AN$ এবং $QR^2=4AS\cdot AR$

সুতরাং $\frac{PN^2}{QR^2}=\frac{AN}{AR}$

অতএব $\frac{AT}{QR}=\frac{PN^2}{PN^2-QR^2}=\frac{4QR^2}{4QR^2-QR^2}=\frac{4}{3}$

অর্থাৎ $3AT=4QR=2PN$.

প্রশ্নমালা

১। যদি অধিবৃত্তের কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি সমান হয়, তবে উভয়ই দৈর্ঘ্যে নাভিলম্বের সমান হইবে।

২। অধিবৃত্তের কোন বিন্দুর কোটি তাহার ভুজের দ্বিগুণ হইলে, কোটির পাদদেশ অধিবৃত্তের নাভি হইবে।

৩। কোন বিন্দু অধিবৃত্তের কোটিকে প্রদত্ত অনুপাতে বিভক্ত করিলে, বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। এই অনুপাত এককের সমান হইলে কি হইবে ?

৪। অধিবৃত্তের উপর দুইটি বিন্দু P এবং P′ যদি এমন ভাবে থাকে যে PAP′ এক সমকোণের সমান হয়, প্রমাণ কর যে, P এবং P′ এর ভুজের গুণফল নাভিলম্বের বর্গের সমান।

৫। প্রমাণ কর যে, শীর্ষ হইতে SPN ত্রিভুজের বহির্বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $\frac{1}{2}$PN এর সমান।

৬। যদি APএর উপর লম্ব PL অক্ষকে L বিন্দুতে ছেদ করে এবং PN কোটি হয়, প্রমাণ কর যে, NL দৈর্ঘ্যে নাভিলম্বের সমান।

৭। যদি SQ এবং AP সমান্তরাল হয় এবং P ও Q বিন্দুর কোটি যথাক্রমে PN ও QM হয়, প্রমাণ কর যে, $AM \cdot AN = SN^2$.

৮। P_1N_1, P_2N_2, P_3N_3 এর অনুপাত 1:2:3 ; প্রমাণ কর যে, AN_1, N_1N_2, N_2N_3এর অনুপাত 1:3:5.

৯। অধিবৃত্তের যে কোন জ্যা PQ অক্ষকে O বিন্দুতে ছেদ করে ; O বিন্দুর কোটি OR এবং P ও Q বিন্দুর কোটি যথাক্রমে PN এবং QM. প্রমাণ কর যে,

(ক) $AM \cdot AN = AO^2$; (খ) $PN \cdot QM = OR^2$;

(গ) $PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2OR^2 - 2AO^2$.

১০। অধিবৃত্তের শীর্ষকে কেন্দ্র এবং ব্যাসার্দ্ধ $\frac{3}{2}$AS ধরিয়া একটি বৃত্ত আঁকা হইয়াছে ; প্রমাণ কর যে, বৃত্তের এবং অধিবৃত্তের সাধারণ জ্যা ASকে দ্বিখণ্ডিত করে।

১১। অধিবৃত্তের সকল জ্যা যাহাদের নাভিস্থ সম্মুখ কোণ এক সমকোণের সমান, একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়।

১২। অধিবৃত্তের সকল নাভিগ জ্যার মধ্যবিন্দু আর একটি সদৃশ অধিবৃত্তের উপর স্থিত এবং সেই অধিবৃত্ত প্রথম অধিবৃত্তের নাভির মধ্য দিয়া যায়।

১৩। APএর মধ্যবিন্দু Q ; প্রমাণ কর Qএর সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত, যাহার শীর্ষ একই কিন্তু নাভিলম্ব পূর্ব্বের নাভিলম্বের অর্দ্ধ।

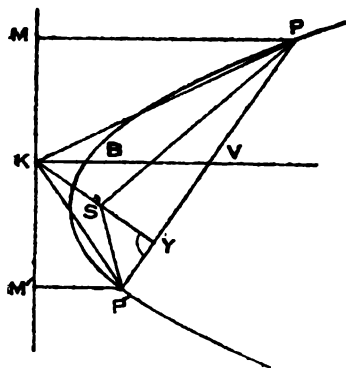
১৪। অধিবৃত্তস্থ Q বিন্দুর কোটি QNকে AP এবং Pএর মধ্য দিয়া অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা যথাক্রমে M′ এবং M বিন্দুতে ছেদ করে; প্রমাণ কর $QN^2 = NM.NM.'$

১৫। QQ′ একটি নাভিগ জ্যা ; প্রমাণ কর যে, AQQ′ ত্রিভুজের দুই বাহু AQ এবং AQ′কে নাভিলম্ব যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে, নাভি হইতে তাহাদের দূরত্ব নাভিগ জ্যাএর দুই প্রান্তের কোটির সমান।

উপপাদ্য—৪

অধিবৃত্তের যে কোন সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর মধ্যবিন্দুর সঞ্চার-পথ অক্ষের সমান্তরাল একটি সরল রেখা।

(The locus of the middle points of any system of parallel chords of a parabola is a straight line parallel to the axis.)

মনে কর PP′ অধিবৃত্তের কোন এক সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর একটি ; S অধিবৃত্তের নাভি এবং MM′ নিয়ামক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PP′এর সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর মধ্যবিন্দু সমূহ অক্ষের সমান্তরাল একটি সরল রেখার উপর অবস্থিত।

নাভি S হইতে PP′এর উপর SY লম্ব টান। মনে কর YSকে বর্ধিত করিলে নিয়ামক MM′কে K বিন্দুতে ছেদ করে, এবং K বিন্দুর মধ্য দিয়া অক্ষের সমান্তরাল করিয়া KBV আঁকিলে তাহা PP′ জ্যাকে V বিন্দুতে ছেদ করে।

P এবং P′ বিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর যথাক্রমে PM এবং P′M′ লম্ব টান। KP, KP′ এবং SP, SP′ যোগ কর।

এখন যেহেতু KMP, KYP এবং SYP সমকোণ, সুতরাং

$$MK^2 = PK^2 - PM^2 = PK^2 - PS^2$$
$$= (KY^2 + PY^2) - (SY^2 + PY^2) = KY^2 - SY^2.$$

অনুরূপভাবে $M'K^2 = P'K^2 - P'M'^2 = P'K^2 - P'S^2$
$$= (KY^2 + P'Y^2) - (SY^2 + P'Y^2) = KY^2 - SY^2.$$

সুতরাং $MK = M'K$;

কিন্তু MP, KV এবং M′P′ সমান্তরাল, কারণ প্রত্যেকটি অক্ষের সমান্তরাল।

অতএব K যখন MM′এর মধ্যবিন্দু, তখন V নিশ্চয়ই PP′এর মধ্যবিন্দু। KY একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু Sএর মধ্য দিয়া যায় এবং ইহা PP′ অর্থাৎ এই গোষ্ঠীর

সকল সমান্তরাল জ্যাএর উপর লম্ব ; সুতরাং এই গোষ্ঠীর জন্য KY একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা।

অতএব KY নিয়ামককে যে K বিন্দুতে ছেদ করে তাহা একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু। আবার KV অক্ষের সমান্তরাল, সুতরাং ইহাও একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা।

অতএব PP′এর সমান্তরাল জ্যা সমূহের মধ্যবিন্দুসমূহ KV রেখার উপর অবস্থিত; অর্থাৎ, অধিবৃত্তের যে কোন সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর মধ্যবিন্দুর সঞ্চার পথ অক্ষের সমান্তরাল একটি সরল রেখা।

সংজ্ঞা ঃ যে কোন সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর মধ্য বিন্দুর সঞ্চার পথকে কনিকের **ব্যাস** (diameter) বলে। বিভিন্ন গোষ্ঠীর ব্যাস বিভিন্ন, কিন্তু কোন একটি গোষ্ঠীর ব্যাস একটিই। অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে এই ব্যাস অক্ষের সমান্তরাল একটি সরল রেখা, অন্য কনিকের ক্ষেত্রে ইহা কেন্দ্রগামী সরল রেখা।

অক্ষের উপর লম্ব জ্যা সমূহকে অক্ষ দ্বিখণ্ডিত করে, সুতরাং অক্ষই এই গোষ্ঠীর ব্যাস। ব্যাস যে বিন্দুতে অধিবৃত্তকে ছেদ করে, তাহাকে ব্যাসের শীর্ষ বলা হয়। ছবিতে KV একটি ব্যাস এবং B এই ব্যাসের শীর্ষ। এই সংজ্ঞা হিসাবেই অক্ষ একটি ব্যাস এবং A ইহার শীর্ষ।

যদি অধিবৃত্তের কোন বিন্দুর মধ্য দিয়া এমন একটি জ্যা আঁকা যায় যাহাকে প্রদত্ত ব্যাস দ্বিখণ্ডিত করে, তবে বিন্দু হইতে ব্যাস পর্য্যন্ত জ্যাএর অংশকে বিন্দুর কোটি বলে এবং ব্যাসের শীর্ষ হইতে কোটির পাদদেশের দূরত্বকে বিন্দুর ভুজ বলে। ছবিতে KBV একটি প্রদত্ত ব্যাস এবং P একটি বিন্দু; PVP′ এমন একটি জ্যা যাহাকে ব্যাস V বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করিতেছে এবং B এই ব্যাসের শীর্ষ; সুতরাং P বিন্দুর ভুজ BV এবং কোটি PV.

যখন ব্যাস অক্ষ হয়, তখন কোটি ব্যাসের উপর লম্ব হয় এবং অধিবৃত্তের শীর্ষ হইতে লম্বের পাদদেশ ভুজ হয়। এই সংজ্ঞা হিসাবেই পূর্ব্বে বলা হইয়াছে PN অক্ষের উপর লম্ব হইলে P বিন্দুর ভুজ AN এবং কোটি PN. অক্ষকে অধিবৃত্তের **প্রধান ব্যাস** (principal diameter) বলে।

সুতরাং দেখা যাইতেছে, ব্যাস দেওয়া না থাকিলে কোন বিন্দুর ভুজ অথবা

কোটি নির্ণয় করা যায় না, কারণ বিভিন্ন ব্যাসের জন্য বিন্দুর ভুজ এবং কোটি বিভিন্ন হইবে এবং অধিবৃত্তের অসংখ্য ব্যাস আছে। সাধারণত যদি ব্যাস দেওয়া না থাকে, তবে কোন বিন্দুর ভুজ এবং কোটি বলিতে যথাক্রমে AN এবং PN বুঝাইবে ; অর্থাৎ অধিবৃত্তের অক্ষকে ব্যাস ধরিয়া লইতে হইবে।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। একটি অধিবৃত্ত আঁকা আছে ; তাহার নাভি এবং নিয়ামক নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1934.]

দুইটি সমান্তরাল জ্যা PP′ এবং QQ′ লইয়া তাহাদের মধ্যবিন্দু V, V′ যোগ কর। VV′ একটি সরল রেখা এবং অক্ষের সমান্তরাল, কারণ ইহা অধিবৃত্তের ব্যাস। এই ব্যাসের লম্ব যে কোন একটি জ্যা RR′ আঁক এবং RR′এর মধ্যবিন্দু Nএর মধ্য দিয়া ব্যাসের সমান্তরাল একটি সরল রেখা টান। ইহাই অধিবৃত্তের প্রধান ব্যাস অর্থাৎ অক্ষ।

মনে কর, এই রেখা অধিবৃত্তকে A বিন্দুতে ছেদ করে, তবে A অধিবৃত্তের শীর্ষ। NRকে C পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর, যাহাতে $CN = 2AN$ হয়। C এবং A যোগ কর।

মনে কর CA অধিবৃত্তকে L বিন্দুতে ছেদ করে। LS অক্ষের উপর লম্ব টান।

যেহেতু ত্রিভুজদ্বয় ANC এবং ASL সদৃশ, সুতরাং $\frac{CN}{AN} = \frac{LS}{AS}$;

কিন্তু $CN = 2AN$, সুতরাং $LS = 2AS$.

অতএব S অধিবৃত্তের নাভি।

নাভির বিপরীত দিকে ASএর সমান AX কাটিয়া লইয়া Xএর মধ্য দিয়া অক্ষের উপর লম্ব টান। এই লম্বটি অধিবৃত্তের নিয়ামক।

উদাঃ ২। অধিবৃত্তের নাভিগ জ্যার অংশ দুইটির অন্তর দৈর্ঘ্যে শীর্ষগ সমান্তরাল জ্যার সমান। [কঃ বিঃ 1941.]

মনে কর PSP′ নাভিগ জ্যা এবং AQ শীর্ষগ সমান্তরাল জ্যা।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$PS - P'S = AQ.$$

মনে কর PP′ এবং AQএর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে V এবং V′; তবে VV′ এই গোষ্ঠীর ব্যাস, সুতরাং ইহা অক্ষ ASএর সমান্তরাল। অতএব $AV' = VS$.

সুতরাং $PS - P'S = (PV + VS) - (P'V - VS) = 2VS = 2AV' = AQ$.

উদাঃ ৩। অধিবৃত্তের যে কোন জ্যা অক্ষ দ্বারা যে দুইটি অংশে বিভক্ত হয় তাহাদের অন্তর দৈর্ঘ্যে শীর্ষগ সমান্তরাল জ্যার সমান। [কঃ বিঃ 1948.]

মনে কর PP′ একটি জ্যা এবং AQ শীর্ষগ সমান্তরাল জ্যা। PP′কে অক্ষ O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$PO - P'O = AQ.$$

মনে কর PP′ এবং AQএর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে V এবং V′; তবে VV′ এই গোষ্ঠীর ব্যাস, সুতরাং ইহা অক্ষ AOএর সমান্তরাল। অতএব $AV' = VO$.

সুতরাং $PO - P'O = (PV + VO) - (PV' - VO) = 2VO = 2AV' = AQ$.

উদাঃ ৪। অধিবৃত্তের শীর্ষের মধ্য দিয়া AQ জ্যা আঁকা হইয়াছে এবং Q বিন্দুতে অঙ্কিত ইহার লম্ব QL অক্ষকে L বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে AL দৈর্ঘ্যে AQএর সমান্তরাল নাভিগ জ্যার সমান। [কঃ বিঃ 1938, '45.]

মনে কর নাভিগ জ্যা PSP', AQএর সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AL = PP'$.

P এবং P' হইতে অক্ষের উপর যথাক্রমে PN এবং P'N' এবং নিয়ামকের উপর যথাক্রমে PM এবং P'M' লম্ব টান।

P'এর মধ্য দিয়া P'O অক্ষের সমান্তরাল টান এবং মনে কর ইহা বর্দ্ধিত PNকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন POP' এবং AQL ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\angle POP' = \angle AQL =$ এক সমকোণ, এবং $\angle PP'O = \angle QAL$ কারণ AQ এবং PP' সমান্তরাল, আবার AL এবং P'O সমান্তরাল ; অতএব ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

সুতরাং $\dfrac{PP'}{P'O} = \dfrac{AL}{AQ}$.

কিন্তু $PS = PM = XN$ এবং $P'S = P'M' = XN'$;

সুতরাং $PS - P'S = XN - XN' = N'N = P'O$.

পুনরায় $PS - P'S = AQ$; সুতরাং $P'O = AQ$.

অতএব $AL = PP'$.

উদাঃ ৫। অধিবৃত্তের যে কোন নাভিগ জ্যার দুই প্রান্তের ভুজের অন্তর দৈর্ঘ্যে শীর্ষগ সমান্তরাল জ্যার সমান।

উদাঃ (৪) হইতে পাওয়া যায় $NN' = P'O = AQ$; কিন্তু $NN' = AN - AN'$.

অতএব $AN - AN' = AQ$.

প্রশ্নমালা

১। অধিবৃত্তের যে কোন ব্যাস নিয়ামকের উপর লম্ব।

২। যদি অধিবৃত্তের কোন ব্যাস QQ' জ্যাকে দ্বিখণ্ডিত করে এবং নিয়ামককে K বিন্দুতে ছেদ করে; প্রমাণ কর যে KS, QQ'এর উপর লম্ব।

৩। অধিবৃত্তের নাভিগ জ্যা PSP'এর ব্যাস নিয়ামককে K বিন্দুতে ছেদ করে; প্রমাণ কর যে $\angle PKP'$ সমকোণ।

৪। অধিবৃত্তস্থ একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া একটি জ্যা আঁক, যাহা প্রদত্ত ব্যাস দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৫। অধিবৃত্তের অক্ষের সহিত সমভাবে নত দুইটি জ্যার মধ্যবিন্দু অক্ষ হইতে সমদূরবর্ত্তী।

৬। অধিবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর ব্যাস এবং নাভিগ লম্ব পরস্পরকে নিয়ামকের উপর ছেদ করে। (নাভিগ লম্ব বলিতে নাভি হইতে জ্যাএর উপর লম্ব বুঝায়)।

৭। যদি অধিবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠী অক্ষের সহিত 45° কোণে নত থাকে, প্রমাণ কর যে তাহাদের ব্যাস নাভিলম্বের একপ্রান্ত দিয়া যাইবে।

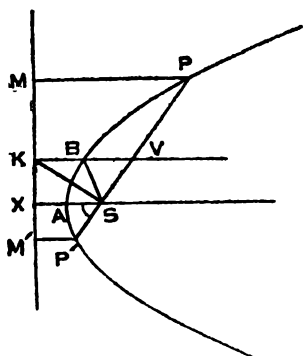
৮। অধিবৃত্তের নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একটি জ্যা আঁক, যাহা প্রদত্ত ব্যাস দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

সংজ্ঞাঃ যে নাভিগ জ্যা অধিবৃত্তের কোন ব্যাস দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয়, তাহার দৈর্ঘ্যকে সেই ব্যাসের **উপব্যাস** (parameter) বলে।

উপমা স্বরূপ বলা যায়, নাভিলম্ব অক্ষের উপব্যাস।

উপপাদ্য—৫

অধিবৃত্তের কোন ব্যাসের উপব্যাস সেই ব্যাসের শীর্ষ হইতে নাভির দূরত্বের চতুর্গুণ।

(The parameter of any diameter of a parabola is four times the line joining the focus with the vertex of the diameter.)

মনে কর অধিবৃত্তের PSP′ নাভিগ জ্যা KBV ব্যাস দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইতেছে এবং এই ব্যাসের শীর্ষ B ; S অধিবৃত্তের নাভি এবং MM′ নিয়ামক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $PP' = 4BS$.

BS এবং KS যোগ কর এবং P ও P′ হইতে নিয়ামকের উপর যথাক্রমে PM ও P′M′ লম্ব টান।

ব্যাস নিয়ামককে K বিন্দুতে ছেদ করিতেছে, সুতরাং PSP′ জ্যার উপর KS লম্ব।

পুনরায় ব্যাসের শীর্ষ B অধিবৃত্তের উপর একটি বিন্দু, সুতরাং $KB = BS$.

এখন PP′এর মধ্যবিন্দু V এবং MM′এর মধ্যবিন্দু K ; আবার MP এবং M′P′ সমান্তরাল ; সুতরাং KV, MP এবং M′P′এর সমান্তরাল, এবং $2KV = MP + M'P'$.

কিন্তু P এবং P′ অধিবৃত্তের উপর আছে, সুতরাং $PS = PM$ এবং $P'S = P'M'$;

অতএব $PP' = PS + P'S = PM + P'M' = 2KV$.

যেহেতু $KB = BS$, সুতরাং $\angle BKS = \angle BSK$.

পুনরায় $\angle KSV =$ এক সমকোণ

সুতরাং $\angle SKV + \angle KVS =$ এক সমকোণ ;

অতএব $\angle KSV = \angle SKV + \angle KVS$

অর্থাৎ $\angle KSB + \angle BSV = \angle SKV + \angle KVS = \angle SKB + \angle BVS$

কিন্তু $\angle KSB = \angle SKB$

সুতরাং $\angle BSV = \angle BVS$; অর্থাৎ $BS = BV = KB$

অতএব $PP' = 2KV = 2(KB + BV) = 4BS.$

[**টীকা ঃ** অক্ষের উপর লম্ব নাভিগ জ্যা নাভিলম্ব ; ব্যাস অক্ষ এবং শীর্ষ A ; সুতরাং $LL' = 4AS.$]

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। অধিবৃত্তের একটি নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের নাভিগ জ্যা আঁক।

[কঃ বিঃ 1936.]

অধিবৃত্তের নাভি Sকে কেন্দ্র করিয়া এবং নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের এক-চতুর্থাংশ ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত চাপ আঁক।

মনে কর ইহা অধিবৃত্তকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। নিয়ামকের উপর BK লম্ব টান। KS যোগ কর এবং Sএর মধ্য দিয়া KSএর উপর লম্ব PSP′ জ্যা আঁক।

যেহেতু $PP' = 4BS$, সুতরাং ইহাই নির্ণেয় নাভিগ জ্যা।

উদাঃ ২। অধিবৃত্তের এমন একটি নাভিগ জ্যা আঁক, যাহাকে নাভি 1 : 3এর অনুপাতে বিভক্ত করে। [কঃ বিঃ 1939.]

অধিবৃত্তের অক্ষের সহিত $60°$ কোণ করিয়া PSP′ একটি নাভিগ জ্যা আঁক।

মনে কর KBV ইহার ব্যাস। KS এবং BS যোগ কর।

KBV অক্ষের সমান্তরাল বলিয়া $\angle BVS = 60°$;

কিন্তু $BS = BV$, সুতরাং $\angle BSV = 60°$;

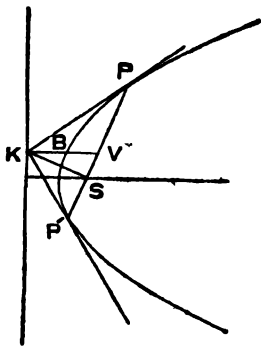
অতএব BVS ত্রিভুজের তৃতীয় কোণ SBV ও $60°$, অর্থাৎ $BS = BV = VS.$

কিন্তু $PP' = 4BS$, সুতরাং $PP' = 4VS.$

এখন PP′এর মধ্যবিন্দু V ; সুতরাং $PS = PV + VS = 3VS$

এবং $P'S = P'V - VS = VS.$

অতএব PP′ই নির্ণেয় জ্যা কারণ S বিন্দু ইহাকে 1 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করিতেছে।

উদাঃ ৩। PSP′ অধিবৃত্তের একটি নাভিগ জ্যা, S ইহার নাভি এবং ব্যাস KBV নিয়ামককে K বিন্দুতে ছেদ করিতেছে ; প্রমাণ কর যে, $KS^2 = SP.SP'$. [কঃ বিঃ 1942.]

$PV = P'V = KV$;

সুতরাং $\angle PKV = \angle KPV$

এবং $\angle P'KV = \angle KP'V$.

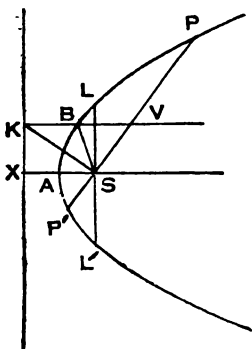
অর্থাৎ $\angle PKP'$ = এক সমকোণ।

পুনরায় KS নাভিগ জ্যা PSP′এর উপর লম্ব।

অতএব $KS^2 = SP.SP'$.

উদাঃ ৪। প্রমাণ কর নাভিলম্ব অধিবৃত্তের ক্ষুদ্রতম নাভিগ জ্যা। [কঃ বিঃ 1946.]

অথবা, প্রমাণ কর অধিবৃত্তের যে কোন ব্যাসের উপব্যাস নাভিলম্ব অপেক্ষা বৃহত্তর। [কঃ বিঃ 1949.]

মনে কর PSP′ অধিবৃত্তের একটি নাভিগ জ্যা এবং LSL′ অধিবৃত্তের নাভিলম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $PP' > LL'$.

$\angle KSV$ = এক সমকোণ, সুতরাং $KV > KS$.

পুনরায় $\angle KXS$ = এক সমকোণ, সুতরাং $KS > XS$.

অতএব $KV > XS$; অর্থাৎ $2BS > 2AS$.

কিন্তু $PP' = 4BS$ এবং $LL' = 4AS$.

সুতরাং $PP' > LL'$.

প্রশ্নমালা

১। অধিবৃত্তের একটি নাভিগ জ্যা আঁক, যাহা দৈর্ঘ্যে নাভিলম্বের দ্বিগুণ।

২। প্রমাণ কর যে দুইটি পরস্পর লম্ব নাভিগ জ্যাএর বিপরীতের যোগফল ধ্রুব।

সংজ্ঞা ঃ অধিবৃত্তস্থ কোন বিন্দু হইতে যদি এমন জ্যা আঁকা যায়, যাহা কোন ব্যাস দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয়, তবে সেই ব্যাসশীর্ষ হইতে জ্যা ও ব্যাসের ছেদ বিন্দুর দূরত্বকে বিন্দুর ভুজ এবং এই ছেদ বিন্দু হইতে প্রদত্ত বিন্দুর দূরত্বকে বিন্দুর কোটি বলে। এই সংজ্ঞা হইতে পাওয়া যায় ব্যাস অক্ষ হইলে অধিবৃত্তের শীর্ষ হইতে লম্বের পাদদেশের দূরত্ব বিন্দুর ভুজ এবং লম্ব বিন্দুর কোটি; কারণ লম্ব জ্যাকে অক্ষ দ্বিখণ্ডিত করে।

উপপাদ্য—৬

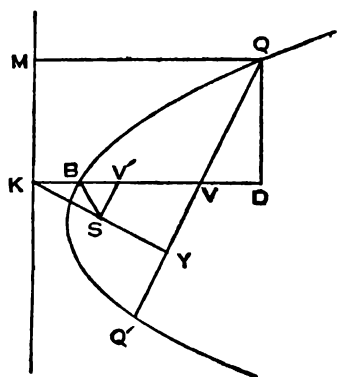
অধিবৃত্তস্থ কোন বিন্দুর যে কোন ব্যাসের জন্য কোটী, সেই ব্যাসের উপব্যাস ও বিন্দুর ভুজের সমানুপাতী।

(The ordinate of any point on a parabola with respect to any diameter is a mean proportional to its parameter and the abscissa of the point with respect to the diameter.)

মনে কর QQ′ অধিবৃত্তের জ্যা, S নাভি এবং MK নিয়ামক। Sএর মধ্য দিয়া QQ′এর উপর SY লম্ব টান। এবং মনে কর YS বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে K বিন্দুতে ছেদ করে। K এর মধ্য দিয়া এই জ্যার ব্যাস KBV আঁক, যাহা QQ′ জ্যাকে V বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করে, এবং অধিবৃত্তকে B বিন্দুতে ছেদ করে। তবে এই ব্যাসের জন্য Q বিন্দুর ভুজ BV এবং কোটি QV.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$QV^2 = 4\ BS.\ BV.$

Sএর মধ্য দিয়া QQ′ জ্যার সমান্তরাল SV′ আঁক এবং মনে কর ইহা ব্যাসকে V′ বিন্দুতে ছেদ করে। BS যোগ কর। Q হইতে ব্যাসের উপর এবং নিয়ামকের উপর যথাক্রমে QD এবং QM লম্ব টান।

এখন ত্রিভুজ QDV, KYV এবং KSV′ সদৃশ ;

$$\text{সুতরাং } \frac{QD}{QV}=\frac{KY}{KV}=\frac{KS}{KV'}=\frac{SY}{V'V},$$

$$\therefore \quad \frac{QD^2}{QV^2}=\frac{KY^2-SY^2}{KV^2-V'V^2}=\frac{MK^2}{KV^2-V'V^2}.$$

কিন্তু $QV=MK$;

সুতরাং $QV^2=KV^2-V'V^2=(KB+BV)^2-(BV-BV')^2$

$=(BS+BV)^2-(BV-BS)^2=4BS.\ BV.$

টীকা ঃ এই উপপাদ্যকে এইভাবেও প্রকাশ করা যায় ঃ—

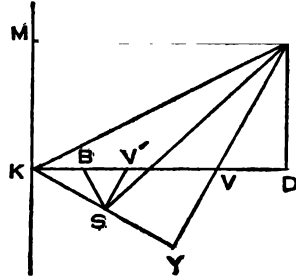
অধিবৃত্তস্থ কোন বিন্দুর যে কোন ব্যাসের জন্য কোটির বর্গ সেই ব্যাসের উপব্যাস এবং বিন্দুর ভুজের গুণফলের সমান।

ব্যাস অক্ষ হইলে লম্ব জ্যাকে সম দ্বিখণ্ডিত করিবে সুতরাং বিন্দু হইতে অক্ষের উপর লম্ব বিন্দুর কোটি হইবে এবং অধিবৃত্তের শীর্ষ হইতে লম্বের পাদদেশের দূরত্ব বিন্দুর ভুজ হইবে। সুতরাং দেখা যাইতেছে উপপাদ্য (৩) এই উপপাদ্যের একটি বিশেষ অবস্থা।

যেহেতু যে কোন প্রদত্ত ব্যাসের জন্য 4BS ধ্রুব, সুতরাং এই উপপাদ্যকে এইভাবেও প্রকাশ করা যায় ঃ অধিবৃত্তস্থ কোন বিন্দুর যে কোন ব্যাসের জন্য কোটির বর্গ বিন্দুর ভুজের সহিত সরল ভেদে থাকে।

বিপরীত উপপাদ্য

কোন সমতলের উপর যদি কোন চলমান বিন্দু Qএর মধ্য দিয়া একটি নির্দ্দিষ্ট-দিকে সরল রেখা টানিলে কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে V বিন্দুতে ছেদ করে এবং যদি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর B একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হয় যাহাতে QV^2 এবং BV সরল ভেদে থাকে, তবে Q বিন্দুর সঞ্চার পথ একটি অধিবৃত্ত হইবে।

যেহেতু QV^2 এবং BV সরল ভেদে আছে, সুতরাং $QV^2 = k.\ BV$, যেখানে k একটি ধ্রুবক। VBকে K অবধি বর্দ্ধিত কর, এবং $BK = \frac{1}{4}k$এর সমান করিয়া কাটিয়া লও। K বিন্দুর মধ্য দিয়া VBKএর উপর লম্ব KM সরল রেখা আঁক। K হইতে QV অথবা QV বর্দ্ধিতের উপর KY লম্ব টান। Bকে কেন্দ্র করিয়া এবং BK ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত চাপ আঁক এবং মনে কর ইহা KYকে S বিন্দুতে ছেদ করিল। B এবং S যোগ কর এবং Sএর মধ্য দিয়া QVYএর সমান্তরাল SV′ সরল রেখা টান, যাহা KBVকে V′ বিন্দুতে ছেদ করে। SQ এবং KQ যোগ কর এবং Q হইতে KBV এবং KMএর উপর যথাক্রমে QD এবং QM লম্ব টান।

এখন $QV^2 = k\ BV = 4BK.\ BV = (BV + BK)^2 - (BV - BK)^2$

$= KV^2 - V'V^2$ (কারণ $BK = BV'$)

পুনরায় ত্রিভুজ QDV, KYV এবং KSV′ সদৃশ ;

সুতরাং $\frac{QV^2}{QD^2} = \frac{KV^2}{KY^2} = \frac{KV'^2}{KS^2} = \frac{V'V^2}{SY^2} = \frac{KV^2 - V'V^2}{KY^2 - SY^2}$.

কিন্তু $QV^2 = KV^2 - V'V^2$

সুতরাং $QD^2 = KY^2 - SY^2 = (KQ^2 - QY^2) - (SQ^2 - QY^2)$

$= KQ^2 - SQ^2$.

পুনরায় $QD^2 = KM^2 = KQ^2 - MQ^2$.

সুতরাং $SQ = MQ$.

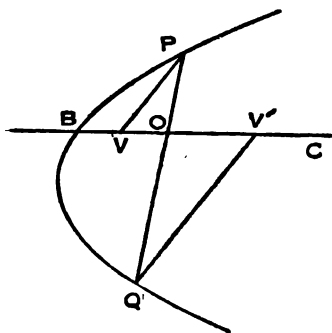
এখন B এবং K নির্দ্দিষ্ট বিন্দু এবং KY একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি নির্দ্দিষ্ট দিকে টানা সরল রেখার উপর লম্ব ; সুতরাং KY একটি নির্দ্দিষ্ট রেখা, S একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু এবং KM ও একটি নির্দ্দিষ্ট রেখা। অতএব Q বিন্দুর সঞ্চারপথ একটী অধিবৃত্ত, যাহার নাভি S এবং নিয়ামক KM.

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। যদি অধিবৃত্তের কোন বিন্দুর কোন ব্যাসের জন্য কোটি ও ভুজ সমান হয়, প্রমাণ কর যে, উভয়ই সেই ব্যাসের উপব্যাসের সমান।

$QV^2 = 4BS.BV$; কিন্তু $QV = BV$, সুতরাং $QV = BV = 4BS$.

উদাঃ ২। PQ কোন অধিবৃত্তের একটি জ্যা এবং BOC যে কোন একটি ব্যাস যাহা এই জ্যাকে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, BO এই ব্যাসের জন্য P এবং Q বিন্দুর ভুজের মধ্যানুপাতী।

মনে কর ব্যাস BOCএর জন্য P এবং Q বিন্দুর কোটি PV এবং QV', এবং ভুজ BV এবং BV'.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $BO^2 = BV.BV'$.

ত্রিভুজদ্বয় POV এবং QOV' সদৃশ ;

সুতরাং $\dfrac{PV}{QV'} = \dfrac{OV}{OV'}$.

কিন্তু $PV^2 = 4BS.BV$ এবং $QV'^2 = 4BS.BV'$;

সুতরাং $\dfrac{BV}{BV'} = \dfrac{PV^2}{QV'^2} = \dfrac{OV^2}{OV'^2}$

$= \dfrac{(BO - BV)^2}{(BV' - BO)^2}$.

অর্থাৎ $BV(BV' - BO)^2 = BV'(BO - BV)^2$.

অতএব $BO^2 = BV.BV'$.

উদাঃ ৩। একটি প্রদত্ত বিন্দুর মধ্য দিয়া অধিবৃত্তের এমন একটি জ্যা আঁক, যাহা বিন্দু দ্বারা নির্দ্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত হয়। [কঃ বিঃ 1945]

প্রদত্ত বিন্দু Oএর মধ্য দিয়া BO ব্যাস এবং POQ একটি জ্যা আঁক।

মনে কর PV এবং QV' এই ব্যাসের জন্য P এবং Q বিন্দুর কোটি। তবে PV এবং QV' সমান্তরাল।

এখন ত্রিভুজদ্বয় POV এবং QOV' সদৃশ ;

সুতরাং $\frac{PV}{QV'}=\frac{PO}{QO}=\frac{n}{m}$, মনে কর।

কিন্তু $PV^2=4BS.BV$ এবং $QV'^2=4BS\ BV'$;

সুতরাং $\frac{PV^2}{QV'^2}=\frac{BV}{BV'}=\frac{n^2}{m^2}$.

পুনরায় $BV.BV'=BO^2$.

B এবং O দেওয়া আছে; সুতরাং V এবং V' নির্ণয় করা যায়, অর্থাৎ P এবং Q বিন্দু নির্ণয় করা যায়। অতএব POQ জ্যা আঁকা যায়।

উদাঃ ৪। যদি কোন সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর QQ' একটী জ্যা হয় এবং KV ব্যাস হয়, প্রমান কর যে $QD^2=4AS.\ BV$, যেখানে QD ব্যাসের উপর Q হইতে লম্ব এবং B ব্যাসের শীর্ষ। [কঃ বিঃ 1947.]

QQ' অধিবৃত্তের জ্যা, S নাভি এবং MK নিয়ামক। Sএর মধ্য দিয়া SY এবং SX যথাক্রমে QQ' এবং নিয়ামকের উপর লম্ব। YS বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে Kতে ছেদ করে এবং KBV প্রদত্ত সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর ব্যাস, যাহা QQ'কে V বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করে।

KBV এবং SX অধিবৃত্তকে যথাক্রমে B এবং A বিন্দুতে ছেদ করে। Q হইতে ব্যাসের এবং নিয়ামকের উপর যথাক্রমে QD এবং QM লম্ব। S হইতে জ্যার সমান্তরাল SV', যাহা ব্যাসকে V' বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $QD^2=4AS.BV$.

ত্রিভুজ QDV, KSV' এবং KXS সদৃশ; সুতরাং $\frac{QD}{QV}=\frac{KS}{KV'}=\frac{SX}{KS}$.

অর্থাৎ $\frac{QD^2}{QV^2}=\frac{KS}{KV'}\cdot\frac{SX}{KS}=\frac{SX}{KV'}=\frac{2AS}{2KB}=\frac{AS}{BS}$.

অতএব $QD^2=QV^2.\frac{AS}{BS}=4AS.BV$. (কারণ $QV^2=4BS.BV$).

প্রশ্নমালা

১। কোন প্রদত্ত ব্যাসের জন্য অধিবৃত্তের উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর, যাহার ভুজ এবং কোটি সমান।

২। অধিবৃত্তের একটি জ্যা QQ'কে ব্যাস BV দ্বিখণ্ডিত করে, এবং সেই জ্যা অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করে ; প্রমাণ কর যে, $QN.Q'N = 4BS{\cdot}AN$.

৩। অধিবৃত্তের একটি জ্যা QQ'কে ব্যাস BV দ্বিখণ্ডিত করে ; B বিন্দুর মধ্য দিয়া BP আর একটি জ্যা, যাহা QQ'কে এবং Qএর মধ্য দিয়া আঁকা ব্যাসকে যথাক্রমে N এবং L বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে $BL^2 = BN.BP$.

৪। যদি Pএর মধ্য দিয়া আঁকা ব্যাসকে QQ', N' বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে $QV^2 = VN.VN'$.

৫। যদি অধিবৃত্তের কোন ব্যাস BV যে কোন একটি জ্যা PP'কে O বিন্দুতে ছেদ করে এবং সেই ব্যাসের উপর PV, $P'V'$ এবং OQ কোটি হয়, প্রমাণ কর যে $QO^2 = PV.P'V'$.

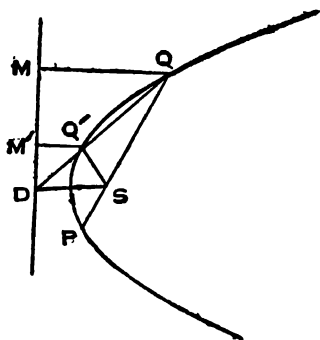
৬। যদি অধিবৃত্তের কোন সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর PNQ একটি জ্যা হয় এবং যদি ইহা অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে $PN.QN \propto AN$.

সংজ্ঞা ঃ একটি অসীম সরল রেখা যাহা কনিককে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে, তাহাকে **ছেদক** বা **সেকাণ্ট** (secant) বলে।

উপপাদ্য—৭

অধিবৃত্তের কোন জ্যা QQ′ যদি নিয়ামককে D বিন্দুতে ছেদ করে তবে SQ এবং SQ′এর বহিঃ-কোণকে SD দ্বিখণ্ডিত করে।

(If any chord QQ′ of a parabola intersect the directrix in D, SD bisects the exterior angle between SQ and SQ′.

মনে কর QQ′ অধিবৃত্তের একটি ছেদক ; অধিবৃত্তের নাভি S এবং নিয়ামক MM′ ; মনে কর এই ছেদক নিয়ামককে D বিন্দুতে ছেদ করে। Q এবং Q′কে Sএর সহিত যোগ কর এবং QSকে যে কোন বিন্দু P পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর। DS যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, QSQ′ ত্রিভুজের বহিঃকোণ Q′SPকে SD দ্বিখণ্ডিত করে।

Q এবং Q′ হইতে নিয়ামকের উপর যথাক্রমে QM এবং Q′M′ লম্ব টান।

ত্রিভুজদ্বয় QMD এবং Q′M′D সদৃশ ;

সুতরাং $\frac{QD}{Q'D} = \frac{QM}{Q'M'}$.

কিন্তু QM = QS এবং Q′M′ = Q′S ;

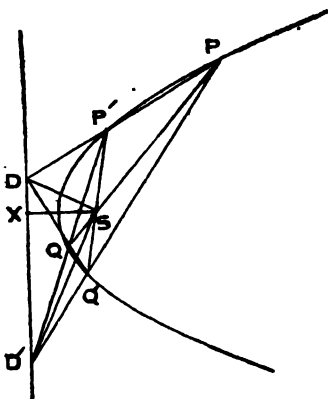
সুতরাং $\frac{QD}{Q'D} = \frac{QS}{Q'S}$.

অর্থাৎ QQ′S ত্রিভুজের ভূমি QQ′ অন্য দুইটি ভুজ QS এবং Q′Sএর অনুপাতে D বিন্দুতে বহির্বিভক্ত হইয়াছে।

অতএব QSQ′ ত্রিভুজের বহিঃ কোণ Q′SPকে SD দ্বিখণ্ডিত করে।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। PQ এবং P′Q′ অধিবৃত্তের যে কোন দুইটি নাভিগ জ্যা ; প্রমাণ কর যে PP′ ও QQ′ এবং PQ′ ও P′Q পরস্পরকে নিয়ামকের উপর ছেদ করে।

মনে কর PP′ নিয়ামককে D বিন্দুতে ছেদ করিল। DS যোগ কর।

তবে PSP′ ত্রিভুজের বহিঃ কোণ P′SQকে DS দ্বিখণ্ডিত করে।

কিন্তু P′SQ কোণ QSQ′ ত্রিভুজেরও বহিঃ কোণ।

সুতরাং Q′Q ও নিয়ামককে D বিন্দুতেই ছেদ করে।

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় অংশও প্রমাণ করা যায়।

মনে কর P′Q নিয়ামককে D′ বিন্দুতে ছেদ করিল। D′S যোগ কর।

তবে P′SQ ত্রিভুজের বহিঃকোণ QSQ′কে D′S দ্বিখণ্ডিত করে।

কিন্তু QSQ′ কোণ PSQ′ ত্রিভুজেরও বহিঃ কোণ।

সুতরাং PQ′ও নিয়ামককে D′ বিন্দুতেই ছেদ করে।

উদাঃ ২। উদাহরণ (১) হইতে প্রমাণ কর যে, যদি SX অক্ষ হয় তবে $DX.D'X = SX^2 =$ (অর্দ্ধ-নাভিলম্ব)।

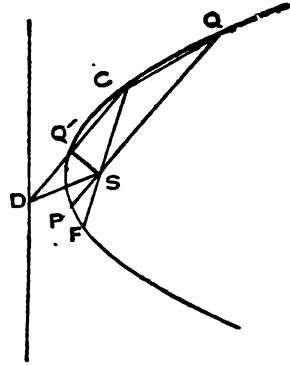
P′SQ′ একটি সরল রেখা এবং QS ইহার উপর দণ্ডায়মান ; DS এবং D′S দুইটি সন্নিহিত কোণ P′SQ এবং QSQ′কে দ্বিখণ্ডিত করিতেছে।

সুতরাং DSD′ সমকোণ।

আবার, DD′এর উপর SX লম্ব।

অতএব $DX.D'X = SX^2 =$ (অর্দ্ধ-নাভিলম্ব)^2.

উদাঃ ৩। প্রমাণ কর যে কোন সরল রেখা অধিবৃত্তকে দুইটির অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

মনে কর কোন সরল রেখা QQ′ অধিবৃত্তকে দুইটি বিন্দু Q, Q′ এবং আরও একটি বিন্দু Cতে ছেদ করে এবং QCQ′ বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে D বিন্দুতে ছেদ করে। Q′, C এবং Qকে Sএর সহিত যোগ কর। CS এবং QSকে যথাক্রমে F এবং P পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর। DS যোগ কর।

CSQ′ ত্রিভুজের বহিঃ কোণ Q′SFকে DS দ্বিখণ্ডিত করে।

পুনরায় QSQ′ ত্রিভুজের বহিঃ কোণ Q′SPকেও DS দ্বিখণ্ডিত করে। কিন্তু ইহা অসম্ভব।

সুতরাং QQ′ অধিবৃত্তকে আরও একটি বিন্দু Cতে ছেদ করিতে পারে না।

প্রশ্নমালা

১। নাভি এবং অধিবৃত্তের উপর দুইটি বিন্দু দেওয়া আছে, অধিবৃত্ত আঁক এবং ইহার নিয়ামক নির্ণয় কর।

২। নাভি এবং অধিবৃত্তের উপর তিনটি বিন্দু দেওয়া আছে; অধিবৃত্ত আঁক এবং ইহার নিয়ামক নির্ণয় কর।

৩। একটি সরল রেখা DQ নিয়ামককে Dতে এবং অধিবৃত্তকে Qতে ছেদ করে। নাভি Sএ DSQ কোণের সমান DSq কোণ আঁকা হইয়াছে। যদি qS বর্দ্ধিত করিলে DQ অথবা বর্দ্ধিত DQকে Q′ বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে Q′ অধিবৃত্তের উপর স্থিত।

৪। PP′ অধিবৃত্তের একটি প্রদত্ত জ্যা এবং Q অধিবৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু। QP এবং QP′ বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে D এবং D′এ ছেদ করে। যদি S অধিবৃত্তের নাভি হয়, প্রমাণ কর যে DSD′ একটি ধ্রুব কোণ।

৫। অধিবৃত্তস্থ কোন একটি বিন্দু Q এবং অধিবৃত্তের শীর্ষ যোগ করিয়া বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে D বিন্দুতে ছেদ করে। Q হইতে নিয়ামকের উপর QM লম্ব। যদি S অধিবৃত্তের নাভি হয়, প্রমাণ কর যে, MSD সমকোণ।

৬। অক্ষের সমান্তরাল কোন সরল রেখা অধিবৃত্তকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

৭। যদি PQ অধিবৃত্তের একটি দ্বিকোটি হয় এবং PX অধিবৃত্তকে P′ বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে P′Q একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়।

৮। X বিন্দুতে নাভিগ জ্যা যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে, অক্ষ তাহাকে দ্বিখণ্ডিত করে।

৯। Q এবং Q′ অধিবৃত্তের উপর তুইটি বিন্দু; O বিন্দু QQ′কে Q এবং Q′এর নাভিগ দূরত্বের অনুপাতে বিভক্ত করে। যদি OSএর উপর DS লম্ব হয়, প্রমাণ কর যে, DS, বর্দ্ধিত QQ′ এবং নিয়ামক সমবিন্দু।

১০। P অধিবৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু এবং A শীর্ষ; PAকে বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে E বিন্দুতে ছেদ করে। PF নিয়ামকের উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে ESF কোণ এক সমকোণের সমান। [কঃ বিঃ 1947.]

সংজ্ঞা ঃ কণিকের **স্পর্শক** বা **ট্যানজেণ্ট** (tangent) বলিতে এমন একটি সরল রেখাকে বুঝায় যাহা বক্রকে মাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং অসীমভাবে বর্দ্ধিত করিলেও বক্রকে পুনরায় আর ছেদ করে না।

এই সংজ্ঞাটি ইউক্লিডের মতানুসারে পাওয়া যায়। অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে এই সংজ্ঞাটিতে ত্রুটি থাকিয়া যায়। অক্ষ এবং অক্ষের সমান্তরাল সরল রেখা সমূহ অধিবৃত্তকে মাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং অসীমভাবে বর্দ্ধিত করিলেও বক্রকে পুনরায় ছেদ করে না। কিন্তু ইহারা স্পর্শক নহে।

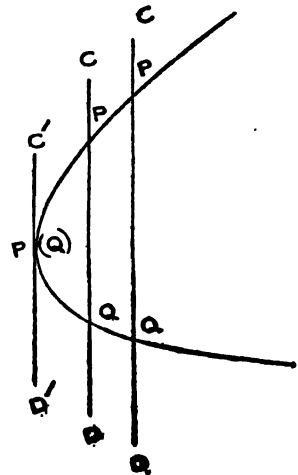
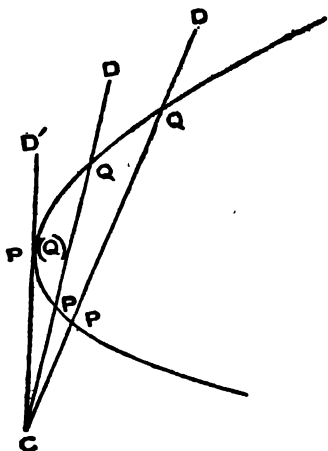
সংজ্ঞা ঃ কণিকের স্পর্শক বলিতে জ্যা বা ছেদকের সীমাস্থ অবস্থান বুঝায়, যখন জ্যা বা ছেদক এবং কণিকের ছেদ বিন্দু দুইটি অবশেষে এক হইয়া যায়।

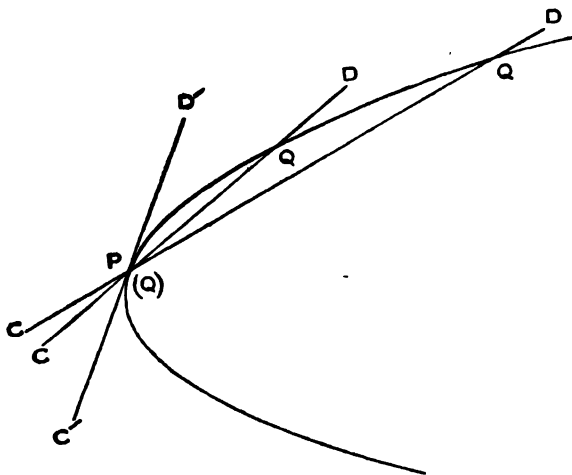
যেহেতু যে কোন সরল রেখা কণিককে দুইটির অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না, সুতরাং স্পর্শক অসীমভাবে বর্দ্ধিত করিলেও কণিককে পুনরায় ছেদ করিতে পারে না। অতএব স্পর্শকের সংজ্ঞা এইরূপও হইতে পারে :—কণিকের উপর দুইটি সমাপাতী বিন্দুর মধ্য দিয়া যে সরল রেখা টানা যায়, তাহাই কণিকের স্পর্শক।

এই বিন্দুর নাম **স্পর্শবিন্দু** এবং স্পর্শক কণিককে এই বিন্দুতে স্পর্শ করে।

CD কণিকের একটি ছেদক, যাহা বক্রকে দুইটি বিন্দু P এবং Qতে ছেদ করিতেছে। যদি CD নিজেরই সমান্তরাল ভাবে নড়িতে থাকে, তবে P এবং Q ক্রমশঃই পরস্পরের নিকটবর্ত্তী হইতে থাকিবে। অবশেষে সীমাস্থ অবস্থায় P এবং Q এক হইয়া যাইবে।

তখন ছেদক CD স্পর্শক C′D′ হইয়া দাঁড়াইবে; এবং স্পর্শ বিন্দু হইবে P (Q), অর্থাৎ P এবং Qএর সমাপতন ঘটিবে।

এইবার মনে কর কণিকের বহিঃস্থিত কোন একটি বিন্দু Cএর মধ্য দিয়া CD ছেদক আঁকা হইয়াছে যাহা কণিককে P এবং Q বিন্দুতে

ছেদ করে। C বিন্দুকে স্থির রাখিয়া যদি CDকে ঘোরান হয়, তবে P এবং Q ক্রমশঃই পরস্পরের নিকট-বর্ত্তী হইতে থাকিবে। অবশেষে সীমাস্থ অবস্থায় P এবং Q এক হইয়া যাইবে। তখন ছেদকে CD স্পর্শক CD′ হইয়া দাঁড়াইবে এবং স্পর্শবিন্দু P (Q) হইবে।

পুনরায়, মনে কর CD ছেদক কণিককে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করে।

কণিকস্থ P বিন্দুকে স্থির রাখিয়া যদি CDকে ঘোরানো হয়, তবে P এবং Q ক্রমশঃই পরস্পরের নিকটবর্ত্তী হইতে থাকিবে।

অবশেষে সীমাস্থ অবস্থায় P এবং Q এক হইয়া যাইবে। তখন ছেদক CD স্পর্শক C′D′ হইয়া দাঁড়াইবে এবং স্পর্শবিন্দু P(Q) হইবে।

উপপাদ্য—৮

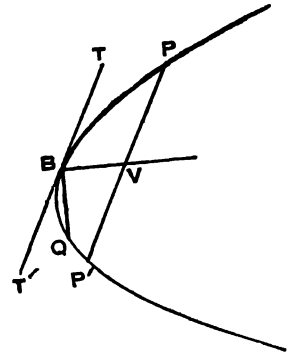
ব্যাসের শীর্ষে অঙ্কিত অধিবৃত্তের স্পর্শক সেই ব্যাস দ্বারা দ্বিখণ্ডিত জ্যা গোষ্ঠীর সমান্তরাল।

(The tangent to a parabola at its point of intersection with a diameter is parallel to the system of chords bisected by the diameter.)

মনে কর PP′এর সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীকে ব্যাস BV দ্বিখণ্ডিত করে, এবং মনে কর ব্যাসের শীর্ষ B এবং PP′ জ্যার মধ্যবিন্দু V.

মনে কর Bএর মধ্য দিয়া অধিবৃত্তের স্পর্শক TBT′.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, TBT′ এবং PVP′ সমান্তরাল।

মনে কর PP′ নিজেরই সমান্তরাল ভাবে নড়িতেছে।

তবে P এবং P′ ক্রমশঃই পরস্পরের নিকটবর্ত্তী হইতেছে। কিন্তু ব্যাস সর্ব্বদাই জ্যাকে দ্বিখণ্ডিত করিতেছে, অর্থাৎ সর্ব্ব অবস্থাতেই PV এবং P′V সমান থাকিতেছে। সুতরাং অবশেষে সীমাস্থ অবস্থায় PV এবং P′V একই সঙ্গে নিঃশেষ হইবে অর্থাৎ P, V এবং P′এর সমাপতন ঘটিবে।

তখন PP′ জ্যা TBT′ স্পর্শক হইয়া দাঁড়াইবে এবং B ইহার স্পর্শবিন্দু হইবে।

সুতরাং TBT′ এবং PVP′ সমান্তরাল।

বিকল্প প্রমাণ

যদি TBT′ এবং PVP′ সমান্তরাল না হয়, তবে PVP′এর সমান্তরাল করিয়া BQ আঁক।

এখন BQ স্পর্শক নহে, সুতরাং অধিবৃত্তকে B এবং Q দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে এবং ইহা PP′এর সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর একটি।

সুতরাং ব্যাস BV ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

কিন্তু ইহা অসম্ভব।

অতএব TBT'কেই PVP'এর সমান্তরাল হইতে হইবে।

উদাহরণমালা

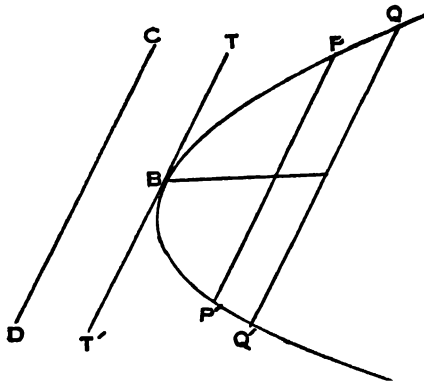
উদাঃ ১। অধিবৃত্তের শীর্ষে অঙ্কিত স্পর্শক অক্ষের উপর লম্ব।

[কঃ বিঃ 1936.]

অধিবৃত্তের অক্ষের উপর লম্ব সকল জ্যাকেই অক্ষ দ্বিখণ্ডিত করে; সুতরাং অক্ষই এই সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর ব্যাস। যেহেতু ব্যাসের শীর্ষে অঙ্কিত অধিবৃত্তের স্পর্শক ব্যাসদ্বারা দ্বিখণ্ডিত জ্যা গোষ্ঠীর সমান্তরাল, অতএব অধিবৃত্তের শীর্ষে অঙ্কিত স্পর্শক অক্ষের উপর লম্ব।

উদাঃ ২। অক্ষের অসমান্তরাল যে কোন সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক আঁক। প্রমাণ কর যে এইরূপ স্পর্শক মাত্র একটিই আঁকা সম্ভব।

[কঃ বিঃ 1928.]

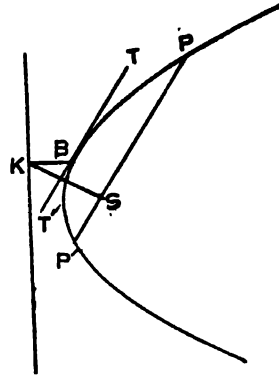
মনে কর CD অক্ষের অসমান্তরাল একটি সরলরেখা। CDএর সমান্তরাল অধিবৃত্তের দুইটি জ্যা PP' এবং QQ' আঁক। জ্যা দুইটির মধ্য-বিন্দু যোগ করিলে এই গোষ্ঠীর ব্যাস পাওয়া যাইবে।

মনে কর এই ব্যাস অধিবৃত্তকে B বিন্দুতে ছেদ করে।

এইবার Bএর মধ্য দিয়া CDএর সমান্তরাল TBT' সরলরেখা আঁক। ইহাই নির্ণেয় স্পর্শক।

যেহেতু ব্যাস অধিবৃত্তকে মাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করে, সুতরাং এইরূপ স্পর্শক মাত্র একটিই আঁকা সম্ভব।

উদাঃ ৩। অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুর মধ্য দিয়া স্পর্শক আঁক।

মনে কর B অধিবৃত্তের উপর প্রদত্ত একটি বিন্দু।

অধিবৃত্তের নিয়ামকের উপর BK লম্ব টান। KS যোগ কর। Bএর মধ্য দিয়া KSএর উপর লম্ব TBT' সরলরেখা টান। ইহাই নির্ণেয় স্পর্শক।

KB একটি ব্যাস এবং PSP' ইহার উপব্যাস। TBT' এবং PSP' সমান্তরাল, কারণ উভয়ই KSএর উপর লম্ব। KB ব্যাসের শীর্ষ B এবং PSP'-এর সমান্তরাল গোষ্ঠীকে এই ব্যাস দ্বিখণ্ডিত করিতেছে।

অতএব TBT' স্পর্শক।

প্রশ্নমালা

১। নিয়ামকের উপরিস্থ যে-কোন বিন্দুকে অধিবৃত্তের নাভির সহিত যোগ করিলে শীর্ষে অঙ্কিত স্পর্শক দ্বারা তাহা দ্বিখণ্ডিত হয়।

২। অধিবৃত্তের অক্ষের সহিত প্রদত্ত কোণ করিয়া একটি স্পর্শক আঁক।

৩। অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুর নাভিগ দূরত্বকে ব্যাস ধরিয়া বৃত্ত আঁকিলে তাহা শীর্ষে অঙ্কিত স্পর্শককে স্পর্শ করে।

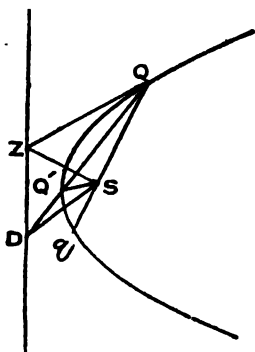
৪। অধিবৃত্তের যে কোন স্পর্শকের সমান্তরাল নাভিগ জ্যা দৈর্ঘ্যে স্পর্শবিন্দুর নাভিগ দূরত্বের চতুর্গুণ।

৫। অধিবৃত্তের কোন স্পর্শক অক্ষের সমান্তরাল হইতে পারে না।

উপপাদ্য—৯

অধিবৃত্তের যে-কোন স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু ও নিয়ামকের মধ্যে ছেদিতাংশ নাভিতে এক সমকোণের সম্মুখীন হয়।

(The portion of the tangent at any point of a parabola intercepted between that point and the directrix subtends a right angle at the focus.)

মনে কর QZ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক, যাহার স্পর্শবিন্দু Q এবং যাহা নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, নাভিতে QZএর সম্মুখ কোণ অর্থাৎ QSZ কোণ এক সমকোণের সমান।

Qএর মধ্য দিয়া অধিবৃত্তের একটি জ্যা QQ' আঁক এবং মনে কর যে ইহা বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে D বিন্দুতে ছেদ করে। মনে কর Q বিন্দুর মধ্য দিয়া QSq নাভিগ জ্যা। Q'S এবং DS যোগ কর। তবে Q'Sq কোণকে অর্থাৎ QSQ' কোণের বহিঃকোণকে DS দ্বিখণ্ডিত করিবে ; অর্থাৎ $\angle Q'SD = \angle DSq$.

এইবার মনে কর Qকে স্থির রাখিয়া ছেদক QQ'Dকে এমন ভাবে ঘোরান হইতেছে যে Q' ক্রমেই Qএর নিকটবর্ত্তী হইতেছে।

তাহা হইলে QSQ'এর বহিঃকোণ Q'Sq ক্রমশঃই বাড়িয়া যাইতেছে, কিন্তু DS সর্ব্বদাই তাহাকে দ্বিখণ্ডিত করিতেছে।

সীমাস্থ অবস্থায় যখন Q এবং Q' এক হইয়া যাইতেছে, তখন ছেদক Q'QD স্পর্শক QZএ রূপান্তরিত হইতেছে ; এবং সে ক্ষেত্রে বহিঃকোণ Q'Sq দুই সমকোণের সমান হইতেছে।

সুতরাং $\angle Q'SD$ হইয়া যাইতেছে $\angle QSZ$ এবং $\angle DSq$ হইয়া যাইতেছে $\angle ZSq$.

কিন্তু $\angle Q'SD$ সর্ব্বদাই $\angle DSq$এর সমান।

সুতরাং $\angle QSZ = \angle ZSq$.

কিন্তু তাহাদের যোগফল দুই সমকোণের সমান।

অতএব $\angle QSZ =$ এক সমকোণ।

বিপরীত উপপাদ্য

অধিবৃত্তস্থ কোন বিন্দুকে নিয়ামকের উপর কোন বিন্দুর সহিত সরলরেখা দ্বারা যোগ করিলে যদি তাহা নাভিতে এক সমকোণের সম্মুখীন হয়, তবে সেই সরলরেখা অধিবৃত্তস্থ সেই বিন্দুতে অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে।

মনে কর Q অধিবৃত্তের উপর এবং Z নিয়ামকের উপর এমন দুইটি বিন্দু যে QZ নাভি Sএ এক সমকোণের সম্মুখীন হয়; অর্থাৎ $\angle QSZ =$ এক সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে QZ অধিবৃত্তকে Q বিন্দুতে স্পর্শ করে; অর্থাৎ QZ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

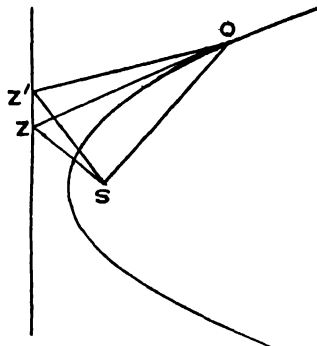
যদি QZ অধিবৃত্তের স্পর্শক না হয়, মনে কর QZ′ অধিবৃত্তের স্পর্শক যাহা নিয়ামককে Z′ বিন্দুতে ছেদ করে। Z′S যোগ কর।

তাহা হইলে $\angle QSZ' =$ এক সমকোণ।

কিন্তু দেওয়া আছে যে, $\angle QSZ =$ এক সমকোণ।

সুতরাং $\angle QSZ' = \angle QSZ$; অর্থাৎ অংশ এবং পূর্ণ সমান

কিন্তু তাহা অসম্ভব।

অতএব QZই Q বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শক।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। নিয়ামকের উপর কোন বিন্দু হইতে অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক আঁক। [কঃ বিঃ 1927.]

মনে কর Z নিয়ামকের উপর যে-কোন একটি বিন্দু, এবং S অধিবৃত্তের নাভি। ZS যোগ কর। Sএর মধ্য দিয়া ZSএর উপর লম্ব QSQ′ নাভিগ জ্যা আঁক। ZQ এবং ZQ′ যোগ কর।

ইহারাই Zএর মধ্য দিয়া অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক, কারণ $\angle ZSQ = \angle ZSQ'$ = এক সমকোণ। উদাঃ (২)এর চিত্র দেখ।

উদাঃ ২। প্রমাণ কর যে অধিবৃত্তের যে-কোন নাভিগ জ্যার দুই প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শক পরস্পরকে সমকোণে নিয়ামকের উপর ছেদ করে।

[কঃ বিঃ 1932, '33, '38.]

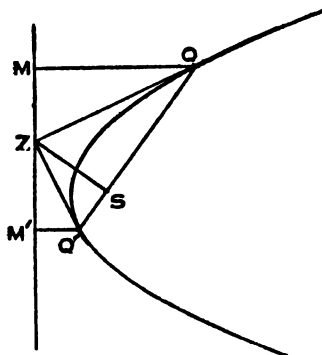
মনে কর QSQ′ অধিবৃত্তের যে-কোন একটি নাভিগ জ্যা এবং ইহার একটি প্রান্ত Q বিন্দুতে অঙ্কিত QZ স্পর্শক Z বিন্দুতে নিয়ামককে ছেদ করে। ZQ′ যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ZQ′ অধিবৃত্তকে Q′ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং QZQ′ কোণ এক সমকোণের সমান।

Q এবং Q′ হইতে নিয়ামকের উপর যথাক্রমে QM এবং Q′M′ লম্ব টান, এবং ZS যোগ কর।

যেহেতু Q বিন্দুতে QZ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে, সুতরাং $\angle QSZ$ = এক সমকোণ।

তাহা হইলে $\angle ZSQ'$ = এক সমকোণ, কারণ QSQ′ একটি সরলরেখা।

অতএব ZQ′ অধিবৃত্তকে Q′ বিন্দুতে স্পর্শ করে; অর্থাৎ Q এবং Q′ বিন্দু দুইটিতে অঙ্কিত অধিবৃত্তের স্পর্শক পরস্পরকে নিয়ামকের উপর ছেদ করে।

সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় QMZ এবং QSZ সর্ব্বসম ; কারণ $QM = QS$, QZ সাধারণ বাহু এবং $\angle QMZ = \angle QSZ =$ এক সমকোণ।

সুতরাং $\angle QZM = \angle QZS$.

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, $\angle Q'ZM' = \angle Q'ZS$.

অতএব $\angle QZS + \angle Q'ZS = \angle QZQ' =$ এক সমকোণ।

প্রশ্নমালা

১। অধিবৃত্তস্থ একটি বিন্দুতে স্পর্শক আঁক।

২। অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দুই প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শক পরস্পরকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহা অক্ষ ও নিয়ামকের ছেদবিন্দু। [কঃ বিঃ 1934.]

৩। নিয়ামকের উপর যে-কোন বিন্দু হইতে অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক আঁকিলে তাহারা পরস্পরের উপর লম্ব হইবে।

৪। অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুর নাভিগ দূরত্ব বিন্দুর নাভিলম্বের প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শক পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কোটির সমান।

৫। অধিবৃত্তের নিয়ামক, নাভি এবং একটি স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দেওয়া আছে ; বক্র অঙ্কন কর।

৬। অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক, স্পর্শবিন্দু এবং নিয়ামক দেওয়া আছে ; বক্র অঙ্কন কর।

৭। অধিবৃত্তের একটি নাভিগ জ্যা এবং দুই প্রান্তে অঙ্কিত দুইটি স্পর্শক দেওয়া আছে ; নিয়ামক ও নাভি নির্ণয় কর।

৮। অধিবৃত্তের যে-কোন নাভিগ জ্যাকে ব্যাস ধরিয়া বৃত্ত আঁকিলে নিয়ামককে স্পর্শ করিবে।

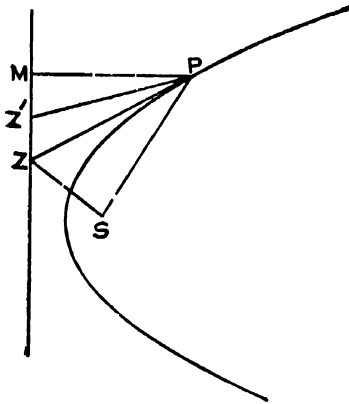
৯। অধিবৃত্তস্থ P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর যদি একটি বিন্দু O লওয়া যায় এবং SP ও নিয়ামকের উপর যথাক্রমে OU এবং OI লম্ব টানা হয়, প্রমাণ কর যে, $SU = OI$. [কঃ বিঃ 1940.]

উপপাদ্য—১০

অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক সেই বিন্দুর নাভিগ দূরত্ব এবং সেই বিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর লম্বের মধ্যস্থিত কোণকে দ্বিখণ্ডিত করে।

(The tangent at any point of a parabola bisects the angle between the focal distance of the point and the perpendicular from the point on the directrix.)

মনে কর অধিবৃত্তস্থ P বিন্দুতে PZ স্পর্শক এবং ইহা নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করে। S অধিবৃত্তের নাভি, SP বিন্দুটির নাভিগ দূরত্ব এবং PM বিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব।

M
P
Z′
Z
S

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle SPZ = \angle MPZ$.

ZS যোগ কর।

এখন সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় ZPS এবং ZPM সর্ব্বসম; কারণ $\angle ZMP = \angle ZSP =$ এক সমকোণ, PZ সাধারণ বাহু এবং $PM = PS$.

অতএব $\angle MPZ = \angle SPZ$,

অর্থাৎ $\angle MPS$ কোণকে PZ দ্বিখণ্ডিত করে।

বিপরীত উপপাদ্য

অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুর মধ্য দিয়া একটি সরল রেখা যদি সেই বিন্দুর নাভিগ দূরত্ব এবং সেই বিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর লম্বের মধ্যস্থিত কোণকে দ্বিখণ্ডিত করে, তবে সরল রেখাটি সেই বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শক।

মনে কর অধিবৃত্তস্থ P বিন্দুর মধ্য দিয়া PZ একটি সরল রেখা টানা হইয়াছে। P বিন্দু হইতে PM নিয়ামকের উপর লম্ব এবং PS নাভিগ দূরত্ব। MPS কোণকে PZ দ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PZ অধিবৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে।

ত্রিভুজদ্বয় PMZ এবং PSZ সর্ব্বসম; কারণ $\angle MPZ = \angle SPZ$, PZ সাধারণ বাহু, এবং $PM = PS$.

সুতরাং $\angle PSZ = \angle PMZ =$ এক সমকোণ।

অতএব PZ অধিবৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে।

বিকল্প প্রমাণ

যদি PZ অধিবৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ না করে, তবে মনে কর PZ′ অধিবৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিতেছে।

তাহা হইলে $\angle MPZ' = \angle SPZ'$,

অর্থাৎ MPS কোণকে PZ′ দ্বিখণ্ডিত করিতেছে।

কিন্তু দেওয়া আছে, $\angle MPZ = \angle SPZ$,

অর্থাৎ MPS কোণকে PZ দ্বিখণ্ডিত করে।

তাহা হইলে MPS কোণের দুইটি দ্বিখণ্ডক পাওয়া গেল, যাহা অসম্ভব।

সুতরাং PZই অধিবৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। অধিবৃত্তের নাভি হইতে যে কোন স্পর্শকের উপর লম্বের পাদ-বিন্দুর সঞ্চারপথ শীর্ষে অঙ্কিত স্পর্শক। [কঃ বিঃ 1931, '47]

মনে কর PT অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক, S নাভি এবং MX নিয়ামক। S হইতে PTএর উপর SY লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, Yএর সঞ্চারপথ শীর্ষে অঙ্কিত স্পর্শক।

P হইতে নিয়ামকের উপর PM লম্ব টান এবং MY, AY এবং PS যোগ কর।

ত্রিভুজদ্বয় SPY এবং MPY সর্ব্বসম; কারণ PM = PS, ∠MPY = ∠SPY এবং PY সাধারণ বাহু। সুতরাং SY = YM, এবং ∠SYP = ∠MYP = এক সমকোণ। অতএব SYM একটি সরল রেখা। এখন MXS ত্রিভুজে MY = YS এবং XA = AS; সুতরাং AY এবং MX সমান্তরাল; অর্থাৎ AY অক্ষের উপর A বিন্দুতে লম্ব। অতএব AY অধিবৃত্তকে A বিন্দুতে স্পর্শ করে; অর্থাৎ Yএর সঞ্চারপথ শীর্ষে অঙ্কিত স্পর্শক।

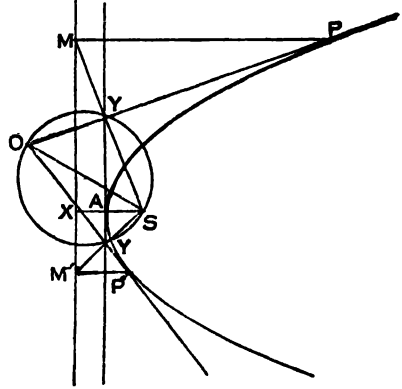
উদাঃ ২। অধিবৃত্তের বহিঃবিন্দু হইতে অধিবৃত্তের স্পর্শক আঁক।

মনে কর S অধিবৃত্তের নাভি এবং MM′ নিয়ামক। O অধিবৃত্তের বাহিরে একটি বিন্দু। O হইতে অধিবৃত্তের স্পর্শক আঁকিতে হইবে।

Oকে কেন্দ্র করিয়া এবং OS ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক এবং মনে কর ইহা নিয়ামককে M′ বিন্দুতে ছেদ করে। M এবং M′ মধ্য দিয়া নিয়ামকের উপর লম্ব আঁক এবং মনে কর ইহারা অধিবৃত্তকে যথাক্রমে P এবং P′এ ছেদ করিল। তবে OP এবং OP′ নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়।

[প্রমাণ কর।]

উদাঃ ৩। অধিবৃত্তের নাভি ও নিয়ামক দেওয়া আছে; যে-কোন বহির্বিন্দু হইতে স্পর্শক আঁক। কয়টি স্পর্শক আঁকা সম্ভব? [কঃ বিঃ 1938.]

মনে কর অধিবৃত্তের S নাভি এবং MM′ নিয়ামক দেওয়া আছে কিন্তু অধিবৃত্ত দেওয়া নাই। O বাহিরে যে-কোন একটি বিন্দু। O বিন্দু হইতে অধিবৃত্তের স্পর্শক আঁকিতে হইবে।

S হইতে নিয়ামকের উপর SX লম্ব টান। SXএর মধ্য বিন্দু A অধিবৃত্তের শীর্ষ। OS যোগ কর এবং ইহাকে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্ত আঁক, যাহা শীর্ষের মধ্য দিয়া নিয়ামকের সমান্তরাল একটি সরল রেখাকে Y এবং Y′ বিন্দুতে ছেদ করে। বর্দ্ধিত OY এবং OY′ যথাক্রমে অধিবৃত্তকে P এবং P′ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে বহির্বিন্দু O হইতে OYP এবং OY′P′ অধিবৃত্তের স্পর্শক এবং P এবং P′ যথাক্রমে স্পর্শ বিন্দু।

SY এবং SY′ যোগ করিয়া বর্দ্ধিত করিলে মনে কর নিয়ামককে যথাক্রমে M এবং M′এ ছেদ করে। M এবং M′এ নিয়ামকের উপর লম্ব টান। ইহারা অধিবৃত্তকে P এবং P′ বিন্দুতে ছেদ করিবে।

[প্রমাণ কর।]

বিকল্প পদ্ধতি :

নাভি এবং নিয়ামক দেওয়া থাকিলে অধিবৃত্ত আঁকা যায়। তাহার পর উদাহরণ (২)এর সাহায্যে বহির্বিন্দু হইতে অধিবৃত্তের স্পর্শকও আঁকা যায়।

প্রশ্নমালা

১। অধিবৃত্তের যে-কোন নাভিগ জ্যাকে নাভিলম্বের প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি নাভি হইতে সমদূরবর্ত্তী দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

২। অধিবৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে $SP = ST$.

৩। দুইটি অধিবৃত্তের নাভি সাধারণ এবং তাহাদের অক্ষ একই সরল-রেখায় কিন্তু বিপরীতমুখী ; প্রমাণ কর যে, অধিবৃত্ত দুইটি পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে।

৪। দুইটি অধিবৃত্তের নাভি সাধারণ এবং তাহাদের অক্ষ পরস্পরের উপর লম্ব ; প্রমাণ কর যে, অধিবৃত্ত দুইটি পরস্পরকে $45°$ কোণে ছেদ করে।

৫। অধিবৃত্তস্থ যে-কোন দুইটি বিন্দু P এবং P′এ অঙ্কিত স্পর্শক পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে এবং P ও P′ হইতে যথাক্রমে PM এবং P′M′ নিয়ামকের উপর লম্ব। যদি S অধিবৃত্তের নাভি হয়, প্রমাণ কর যে, $OM = OM' = OS$.

৬। অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুর নাভিগ দূরত্বকে ব্যাস ধরিয়া বৃত্ত আঁকিলে তাহা শীর্ষে অঙ্কিত স্পর্শককে স্পর্শ করে।

৭। অধিবৃত্তস্থ যে-কোন P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর যদি নাভি হইতে SY লম্ব হয়, প্রমাণ কর যে, $SY^2 = AS \cdot SP$, যেখানে A অধিবৃত্তের শীর্ষ।

৮। অধিবৃত্তের নাভিগ জ্যার প্রান্তে অঙ্কিত দুইটি স্পর্শক নাভিলম্বকে নাভি হইতে সমদূরবর্ত্তী দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

৯। অধিবৃত্তের যে-কোন দুইটি সমকোণী স্পর্শকের ছেদ বিন্দুর সঞ্চারপথ নিয়ামক।

১০। অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক এবং নাভি দেওয়া আছে ; নিয়ামক নির্ণয় কর।

১১। অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক এবং শীর্ষ দেওয়া আছে ; নাভির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১২। বহির্বিন্দু T হইতে TP এবং TQ অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক ;

প্রমাণ কর যে, (ক) TP এবং TQ নাভিতে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে ;

(খ) $ST^2 = SP \cdot SQ$;

(গ) যদি শীর্ষে অঙ্কিত স্পর্শককে TP এবং TQ যথাক্রমে Y এবং Z বিন্দুতে ছেদ করে, তবে T,Y,S,Z সমবৃত্ত ;

(ঘ) যদি অধিবৃত্তের অপর একটি R বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক TP এবং TQকে যথাক্রমে P′ এবং Q′ বিন্দুতে ছেদ করে,

$$\text{তবে } \frac{TP'}{TP}+\frac{TQ'}{TQ}=1,\ \ \frac{QQ'}{Q'T}=\frac{TP'}{PP'}=\frac{Q'R}{RP'},$$

এবং T, P′, S, Q′ সমবৃত্ত।

১৩। অধিবৃত্তস্থ যে-কোন P বিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর লম্বের পাদবিন্দুকে নাভির সহিত যোগ করিলে P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক তাহাকে দ্বিখণ্ডিত করে। [কঃ বিঃ 1935.]

১৪। যদি PSP′ অধিবৃত্তের নাভিগ জ্যা হয় এবং P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করে, তবে Z, নাভি এবং P ও P′ হইতে নিয়ামকের উপর লম্বের পাদবিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী, এবং $ZP^2 = SP \cdot PP'$.

১৫। অধিবৃত্তস্থ P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক নিয়ামককে Z এবং অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে। যদি P হইতে নিয়ামকের উপর PM লম্ব হয় প্রমাণ কর যে,

(ক) MZS কোণকে PZ দ্বিখণ্ডিত করে ;

(খ) SMকে PT লম্বভাবে দ্বিখণ্ডিত করে।

১৬। অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক নিয়ামককে এবং বর্দ্ধিত নাভিলম্বকে নাভি হইতে সমদূরবর্ত্তী দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

১৭। অধিবৃত্তের যে-কোন নাভিগ জ্যার প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির বর্গের অন্তর নাভিগ জ্যা এবং শীর্ষগ সমান্তরাল জ্যার গুণফলের সমান।

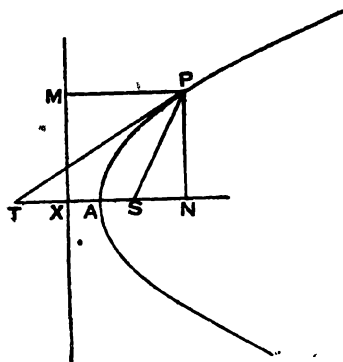
১৮। যে-কোন ব্যাসের যে অংশ উপব্যাস এবং উপব্যাসের প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শকের মধ্যে ছেদিত হয়, ব্যাসের শীর্ষ তাহার মধ্য বিন্দু।

সংজ্ঞা ঃ অধিবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের এবং সেই বিন্দুর কোটির মধ্যে অক্ষের যে অংশ ছেদিত হয়, তাহাকে বিন্দুর **উপস্পর্শক** (Subtangent) বলে।

উপপাদ্য—১১

অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুর উপস্পর্শক শীর্ষে দ্বিখণ্ডিত হয়।

(The subtangent at any point of a parabola is bisected at the vertex.)

মনে কর আধবৃত্তস্থ P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক PT অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে। PN বিন্দুটির কোটি, TN উপস্পর্শক এবং A অধিবৃত্তের শীর্ষ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A বিন্দুতে TN দ্বিখণ্ডিত হয়।

PS যোগ কর এবং নিয়ামকের উপর PM লম্ব টান।

PT স্পর্শক, সুতরাং $\angle MPT = \angle TPS$.

TN এবং MP সমান্তরাল এবং PT উহাদের ছেদক,

সুতরাং $\angle MPT = \angle PTS$.

অতএব $\angle PTS = \angle TPS$; অর্থাৎ $TS = PS$.

কিন্তু $PS = PM = XN$;

সুতরাং $TS = XN$

অর্থাৎ $TA + AS = XA + AN$

কিন্তু $XA = AS$;

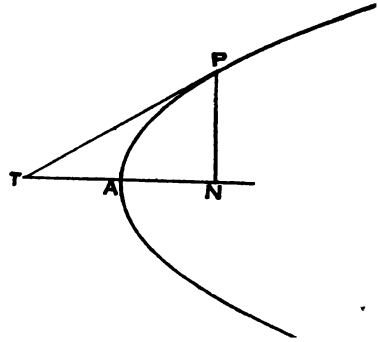
সুতরাং $TA = AN$.

অতএব A বিন্দুতে TN দ্বিখণ্ডিত হয়।

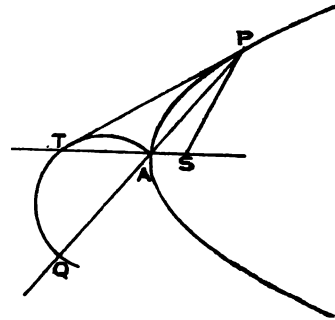
টীকা ঃ P বিন্দুর ভুজ AN ; সুতরাং কোন বিন্দুর উপস্পর্শক বিন্দুর ভুজের দ্বিগুণ।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুতে উপপাদ্য—(১০) এর সাহায্যে স্পর্শক আঁক। [কঃ বিঃ 1937.]

অধিবৃত্তস্থ বিন্দু P হইতে অক্ষের উপর PN লম্ব টান। NAকে বর্দ্ধিত করিয়া ANএর সমান AT কাটিয়া লও। PT যোগ কর। ইহাই P বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শক।

উদাঃ ২। শীর্ষ, স্পর্শক ও স্পর্শ বিন্দু দেওয়া আছে; অধিবৃত্ত আঁক।

মনে কর A শীর্ষ, PT স্পর্শক এবং P স্পর্শবিন্দু। অধিবৃত্ত আঁকিতে হইবে।

PAকে যোগ কর এবং বর্দ্ধিত PA হইতে PAএর সমান করিয়া AQ কাটিয়া লও। AQকে ব্যাস ধরিয়া একটি বৃত্ত চাপ আঁক।

মনে কর ইহা স্পর্শককে T বিন্দুতে ছেদ করিল। TA যোগ কর। ইহাই অধিবৃত্তের অক্ষ।

[প্রমাণ কর।]

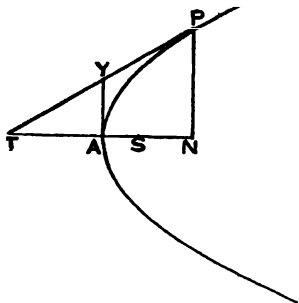
P বিন্দুতে ∠PTAএর সমান TPS কোণ আঁক।

মনে কর PS অক্ষকে S বিন্দুতে ছেদ করিল। তবে S অক্ষের নাভি।

সুতরাং এখন অধিবৃত্ত আঁকা যায়।

উদাঃ ৩। অধিবৃত্তস্থ যে-কোন P বিন্দুতে স্পর্শক আঁকিলে অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে। PTএর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[কঃ বিঃ 1939.]

মনে কর PTএর মধ্যবিন্দু Y; AY যোগ কর এবং P বিন্দুর কোটি PN আঁক।

PNT ত্রিভুজে বাহু TNএর মধ্যবিন্দু A এবং বাহু TPএর মধ্যবিন্দু Y;

সুতরাং AY এবং PN সমান্তরাল।

কিন্তু PN অক্ষের উপর লম্ব, সুতরাং AY অক্ষের উপর লম্ব;

অর্থাৎ AY অধিবৃত্তের শীর্ষ A বিন্দুতে স্পর্শক।

অতএব PTএর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ A বিন্দুতে অঙ্কিত অধিবৃত্তের স্পর্শক।

উদাঃ ৪। যদি অধিবৃত্তস্থ যে-কোন P বিন্দুতে এবং শীর্ষ Aতে স্পর্শক আঁকিলে পরস্পরকে Y বিন্দুতে ছেদ করে এবং অধিবৃত্তের নাভি S ও P বিন্দুর কোটি PN হয়, প্রমাণ কর যে, $AY^2 = AS \cdot AN$. [কঃ বিঃ 1946, '48]

মনে কর PYকে বর্দ্ধিত করিলে অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে।

PNT ত্রিভুজে TN বাহুর মধ্যবিন্দু A এবং TP বাহুর মধ্যবিন্দু Y; সুতরাং $AY = \frac{1}{2} PN$.

অতএব $AY^2 = \frac{1}{4}PN^2 = \frac{1}{4}(4AS \cdot AN) = AS \cdot AN$.

প্রশ্নমালা

১। যদি AXএর মধ্যবিন্দু T হয়, প্রমাণ কর যে ASএর মধ্যবিন্দু N হইবে।

২। অধিবৃত্তের বাহিরে অক্ষস্থ কোন বিন্দু হইতে অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক আঁক।

৩। প্রমাণ কর যে TPN ত্রিভুজের বহির্বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ = $\surd(SP \cdot AN)$.

৪। যদি SY, নাভি হইতে P বিন্দুতে অঙ্কিত অধিবৃত্তের স্পর্শকের উপর লম্ব হয় প্রমাণ কর যে $SY^2 = SA \cdot SP$.

৫। যদি PTএর উপর NR লম্ব হয়, প্রমাণ কর যে, AR = AN.

৬। AXএর মধ্যবিন্দু হইতে অধিবৃত্তের স্পর্শক আঁকিলে, উপস্পর্শক দৈর্ঘ্যে ASএর সমান হয়।

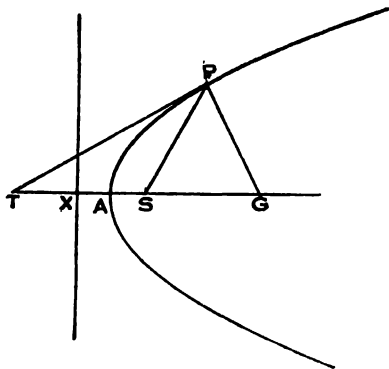
৭। P বিন্দুর মধ্য দিয়া ব্যাস এবং A হইতে P বিন্দুতে অঙ্কিত অধিবৃত্তের স্পর্শকের উপর লম্ব পরস্পরকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, তাহার সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৮। P বিন্দুর মধ্য দিয়া ব্যাস এবং নাভি হইতে P বিন্দুতে অঙ্কিত অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমান্তরাল সরলরেখা পরস্পরকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, তাহার সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

সংজ্ঞা ঃ স্পর্শবিন্দুর মধ্য দিয়া স্পর্শকের উপর লম্ব সরলরেখাকে সেই বিন্দুতে অঙ্কিত **অভিলম্ব** (normal) বলে।

উপপাদ্য—১২

অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুতে অভিলম্ব বিন্দুর নাভিগ দূরত্বের এবং অক্ষের সহিত সমান কোণ সৃষ্টি করে।

(The normal at any point of a parabola makes equal angles with the focal distance of the point and the axis.)

মনে কর অধিবৃত্তস্থ P বিন্দুতে স্পর্শক PT এবং অভিলম্ব PG যথাক্রমে অক্ষকে T এবং G বিন্দুতে ছেদ করে। নাভি S এর সহিত P যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে PS এবং SGএর সহিত অভিলম্ব PG সমান কোন সৃষ্টি করে ;

অর্থাৎ $\angle SPG = \angle PGS$.

$\angle TPG = \angle TPS + \angle SPG =$ এক সমকোণ ;

সুতরাং $\angle PTG + \angle PGT =$ এক সমকোণ।

কিন্তু $\angle PTS = \angle TPS$.

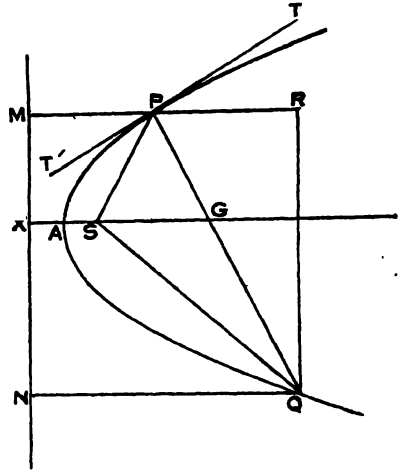
অতএব $\angle SPG = \angle PGS$.

টীকা ঃ—কোন বিন্দুতে অভিলম্ব বলিতে সাধারণত অভিলম্বের বিন্দু হইতে অক্ষ পর্য্যন্ত অংশকে বুঝায়।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। অধিবৃত্তের PQ জ্যা P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব এবং নাভি Sএ ইহা এক সমকোণের সম্মুখীন ; প্রমাণ কর যে, SQ = 2SP.

মনে কর PQ জ্যা P বিন্দুতে অঙ্কিত অধিবৃত্তের অভিলম্ব। PS ও QS যোগ কর এবং P ও Q হইতে নিয়ামকের উপর যথাক্রমে PM এবং QN লম্ব টান। Q হইতে বর্দ্ধিত MPএর উপর QR লম্ব টান।

মনে কর PQ অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করে এবং TPT′ অধিবৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে। তবে $\angle T'PS = \angle T'PM = \angle TPR$.

কিন্তু $\angle TPG = \angle T'PG =$ এক সমকোণ।

সুতরাং $\angle SPG = \angle RPG$.

ত্রিভুজদ্বয় PSQ এবং PRQ সর্ব্বসম ; কারণ $\angle PSQ = \angle PRQ$ এক সমকোণ, $\angle SPQ = \angle RPQ$ এবং PQ সাধারণ বাহু।

সুতরাং $SP = PR$.

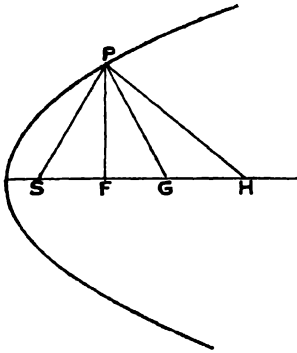
কিন্তু $SP = PM$; সুতরাং $SP = \frac{1}{2}(PM + PR) = MR$.

কিন্তু $MR = QN = SQ$.

অতএব $2SP = SQ$.

উদাঃ ২। স্পর্শক না আঁকিয়া অধিবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে অভিলম্ব আঁক।

প্রদত্ত বিন্দু Pকে নাভি Sএর সহিত যোগ কর। অক্ষ হইতে $SG = SP$ কাটিয়া লও। PG যোগ কর। ইহাই নির্ণেয় অভিলম্ব।

উদাঃ ৩। অভিলম্ব PGএর সহিত সমান কোণ করিয়া PF এবং PH আঁকা হইয়াছে এবং ইহারা যথাক্রমে অক্ষকে F এবং H বিন্দুতে ছেদ করে। যদি S অধিবৃত্তের নাভি হয়, প্রমাণ কর যে, $SG^2 = SF \cdot SH$.

$\angle SPG = \angle SGP$;

অর্থাৎ $\angle SPF + \angle FPG = \angle GHP + \angle GPH$.

কিন্তু দেওয়া আছে,

$\angle FPG = \angle GPH$.

সুতরাং $\angle SPF = \angle GHP$.

এখন SFP এবং SPH ত্রিভুজদ্বয়ে

$\angle SPF = \angle GHP$,

এবং $\angle PSF$ সাধারণ কোণ।

সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

অতএব $\frac{SP}{SF} = \frac{SH}{SP}$, অর্থাৎ $SP^2 = SF \cdot SH$.

প্রশ্নমালা

১। যদি অধিবৃত্তস্থ P বিন্দু হইতে PM নিয়ামকের উপর লম্ব হয়, এবং P বিন্দুতে PG অভিলম্ব হয়, প্রমাণ কর যে SM এবং PG সমান এবং সমান্তরাল।

২। অধিবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দুতে অভিলম্ব বিন্দুর নাভিগ দূরত্বের এবং বিন্দুর মধ্যগামী ব্যাসের মধ্যস্থিত কোণকে দ্বিখণ্ডিত করে।

৩। যদি SY এবং SR যথাক্রমে P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের এবং অভিলম্বের উপর নাভি হইতে লম্ব হয়, প্রমাণ কর যে YR অধিবৃত্তের ব্যাস, এবং $SR^2 = AN \cdot SP$, যেখানে P বিন্দুর কোটি PN.

৪। প্রমাণ কর যে PT হইতে এবং Gএর মধ্য দিয়া PTএর সমান্তরাল সরল রেখা হইতে নাভি সমদূরবর্ত্তী।

৫। অধিবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্তে অঙ্কিত অভিলম্বদ্বয় পরস্পরকে অক্ষের উপর সমকোণে ছেদ করে।

৬। প্রমাণ কর যে যদি PM = PG হয়, তবে T, M, P এবং G সমবৃত্ত।

৭। প্রমাণ কর যে Gএর মধ্য দিয়া P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমান্তরাল সরল রেখা একটি সমান সমনাভি (confocal) অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে।

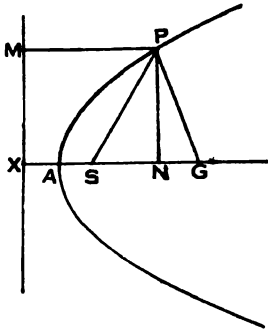
৮। যদি PSP′ একটি নাভিগ জ্যা হয়, প্রমাণ কর যে P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর G হইতে লম্ব আঁকিলে পাদবিন্দু নাভিলম্বের উপর পড়িবে।

কোন বিন্দুর কোটি এবং অভিলম্বের মধ্যে অক্ষের যে অংশ ছেদিত হয় তাহাকে সেই বিন্দুর **উপ-অভিলম্ব** (subnormal) বলে।

উপপাদ্য—১৩

অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুর উপ-অভিলম্ব অর্দ্ধ-নাভিলম্বের সমান।

(The subnormal at any point of a parabola is equal to the semi-latus-rectum.)

মনে কর অধিবৃত্তের P বিন্দুতে PG অভিলম্ব এবং PN কোটি এবং তাহারা যথাক্রমে অক্ষকে G এবং N বিন্দুতে ছেদ করে। তবে NG উপ-অভিলম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $NG = 2AS$.

নাভি Sকে P বিন্দুর সহিত যোগ কর এবং P হইতে নিয়ামকের উপর PM লম্ব টান।

এখন $SP = SG$,

আবার $SP = PM = XN$.

সুতরাং $SG = XN$;

অর্থাৎ $SN + NG = SN + XS$.

সুতরাং $NG = XS$.

কিন্তু $XS = 2AS$;

অতএব $NG = 2AS$.

টীকা : যেহেতু $NG = 2AS$, সুতরাং G সর্ব্বদাই বর্দ্ধিত ASএর উপর থাকিবে।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। যদি SPG সমবাহু ত্রিভুজ হয়, তবে SP নাভিলম্বের সমান।

$SP = SG$, এবং $SN = NG = 2AS$.

অতএব $SP = 4AS$.

উদাঃ ২। যদি Q বিন্দুর কোটি P বিন্দুর উপ-অভিলম্বকে দ্বিখণ্ডিত করে, প্রমাণ কর যে Qএর কোটি দৈর্ঘ্যে P বিন্দুতে অভিলম্বের সমান।

মনে কর P বিন্দুতে PG অভিলম্ব এবং PN কোটি; তবে NG উপ-অভিলম্ব। Q বিন্দুর কোটি QR উপ-অভিলম্ব NGকে R বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $QR = PG$.

$PG^2 = PN^2 + NG^2$

$= 4AS \cdot AN + (2AS)^2$

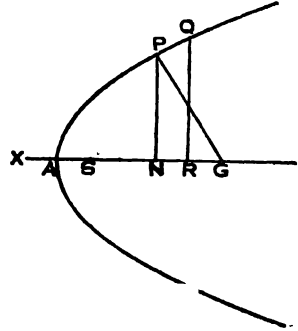
$= 4AS(AN + AS)$.

পুনরায়, $QR^2 = 4AS \cdot AR$

$= 4AS(AN + NR)$

$= 4AS(AN + AS)$.

[কারণ $NR = \frac{1}{2}NG = AS$.]

অতএব $QR = PG$.

প্রশ্নমালা

১। যদি P বিন্দুতে অভিলম্ব PG এবং APএর উপর লম্ব PK অক্ষকে যথাক্রমে G এবং K বিন্দুতে ছেদ করে এবং G হইতে SPএর উপর GH লম্ব হয়, প্রমাণ কর যে, $GK = PH = 2AS$.

২। প্রমাণ কর যে $PG^2 = 4AS \cdot SP$.

৩। অধিবৃত্তের PQ জ্যা P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব এবং ইহা শীর্ষে এক সমকোণের সম্মুখীন ; প্রমাণ কর যে, $SQ = 3SP$.

৪। নাভি হইতে অভিলম্বের উপর লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৫। অধিবৃত্তস্থ P বিন্দুর কোটি PN ; PSX কোণের দ্বিখণ্ডকের সমান্তরাল NR, PMকে R বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, (ক) $PR = 2AS$; (খ) XR এবং SP সমান্তরাল।

৬। যদি PNP′ অধিবৃত্তের কোন বিন্দুর দ্বিকোটি হয় এবং P′ বিন্দু হইতে P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর লম্ব টানিলে Pএর মধ্যগামী ব্যাসকে K বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর PK ধ্রুব।

বিবিধ প্রশ্নমালা

১। যদি অধিবৃত্তস্থ P বিন্দুর PN কোটি হয় এবং SL অর্দ্ধ-নাভিলম্ব হয়, প্রমাণ কর যে $SP \backsim SL = SN$.

২। PSP′ অধিবৃত্তের নাভিগ জ্যা ; প্রমাণ কর যে AP এবং AP′ নাভি লম্বকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের নাভিগ দূরত্ব যথাক্রমে P′ এবং Pএর কোটির সমান।

৩। অধিবৃত্তের যে-কোন দুইটি স্পর্শকের মধ্যস্থিত কোণ, স্পর্শবিন্দু দুইটির নাভিগ দূরত্বের মধ্যস্থিত কোণের অর্দ্ধ।

৪। O অধিবৃত্তের কোন একটি জ্যা PQএর মধ্যবিন্দু ; O হইতে PQএর এবং অক্ষের উপর লম্ব যথাক্রমে অক্ষকে G এবং N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $NG = 2AS$.

৫। যদি অধিবৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে ছেদ করে তবে তাহাদের অংশের গুণফলের অনুপাত সমান্তরাল নাভিগ জ্যা দুইটির অনুপাতের সমান।

৬। একটি অধিবৃত্ত প্রদত্ত চারিটি সরলরেখাকে স্পর্শ করে ; ইহার নাভি নির্ণয় কর।

৭। QQ′ অধিবৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমান্তরাল নাভিগ জ্যা ; প্রমাণ কর যে $QQ' = 4SP$.

৮। অধিবৃত্তের যে কোন স্পর্শকের উপর AR এবং SY লম্ব ; প্রমাণ কর যে, $SY^2 - SA^2 = SY \cdot AR$.

৯। যদি অধিবৃত্তের তিনটি স্পর্শক একটি সমবাহু ত্রিকোণ সৃষ্টি করে, প্রমাণ কর যে ত্রিকোণের একটি শীর্ষের নাভিগ দূরত্ব অপর দুইটি শীর্ষের নাভিগ দূরত্বের যোগফলের সমান।

১০। যে-কোন স্পর্শকের উপর নাভির প্রতিবিম্বের সঞ্চারপথ অধিবৃত্তের নিয়ামক।

১১। ABC ত্রিভুজের বাহু সমূহের মধ্যবিন্দু দিয়া অঙ্কিত অধিবৃত্ত বাহুসমূহকে পুনরায় a, b, c বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, Aa, Bb, Cc পরস্পরের সমান্তরাল।

১২। অধিবৃত্তের একটি নাভিগ জ্যা PSP'এর প্রান্তের কোটি PN এবং P'N'. দুই প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শক পরস্পরকে নিয়ামকের উপর Z বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $SN \cdot SN' = XZ^2$.

১৩। PP' এবং QQ' অধিবৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যা। প্রমাণ কর যে, (ক) PQ' এবং QP' (খ) P ও P'এ এবং Q ও Q'এ অঙ্কিত স্পর্শক, পরস্পরকে এই সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর ব্যাসের উপর ছেদ করে।

১৪। অধিবৃত্তের যে কোন তিনটি স্পর্শক দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত নাভির মধ্য দিয়া যায়।

১৫। দুইটি সমনাভি অধিবৃত্তের সাধারণ জ্যা, অধিবৃত্ত দুইটির নিয়ামকের মধ্যস্থিত কোণকে দ্বিখণ্ডিত করে।

১৬। যদি দুইটি অধিবৃত্তের নিয়ামক সাধারণ হয়, তবে সাধারণ জ্যা তাহাদের নাভির সংযোগকে লম্বভাবে দ্বিখণ্ডিত করে।

১৭। সাধারণ-ভূমি এবং সম-উচ্চতার ত্রিভুজসমূহের লম্ববিন্দুর (orthocentre) সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত।

১৮। দুইটি পরস্পর লম্ব নাভিগ জ্যার একটির প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে নিয়ামকের উপর যে বিন্দুতে ছেদ করে, অপর জ্যাটি তাহার মধ্য দিয়া যায়।

১৯। অধিবৃত্তের নাভি এবং একটি স্পর্শক দেওয়া আছে ; শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২০। যদি একটি পুস্তকের পৃষ্ঠাকে ক্রমাগত এমনভাবে ভাঁজ করা হয় যে কৌণিক বিন্দু সর্ব্বদাই বিপরীত বাহুর উপর পড়ে, তবে বিভিন্ন ভাঁজ রেখা সমূহ একটি অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিবে যাহার নাভি এই কৌণিক বিন্দু এবং নিয়ামক বিপরীত বাহু।

২১। একটি অধিবৃত্ত অপর একটি সমান অধিবৃত্তের উপর গড়াইতেছে ; প্রথমে উভয়ের শীর্ষ এক ছিল। প্রমাণ কর যে প্রথম অধিবৃত্তের শীর্ষে অঙ্কিত স্পর্শক সর্ব্বদাই একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে।

২২। PSQ অধিবৃত্তের একটি নাভিগ জ্যা এবং PA নিয়ামককে M বিন্দুতে ছেদ করে ; প্রমাণ কর যে MQ অক্ষের সমান্তরাল।

দ্বিতীয় অধ্যায়

উপবৃত্ত (Ellipse)

সংজ্ঞা ঃ যদি একটি বিন্দু সমতলের উপর এমন ভাবে নড়িয়া বেড়ায় যে সেই সমতলস্থ কোন একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু এবং নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা হইতে তাহার দূরত্ব দুইটির অনুপাত ধ্রুব থাকে, তবে চলমান বিন্দুটির সঞ্চার পর একটি কণিক হইবে।

এই অনুপাতের নাম **উৎকেন্দ্রতা** (eccentricity) এবং সাধারণতঃ 'e' অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যদি $e<$হয়, তবে কণিককে **উপবৃত্ত** (ellipse) বলে। নির্দ্দিষ্ট বিন্দুকে উপবৃত্তের **নাভি** এবং নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে **নিয়ামক** বলে।

যদি উপবৃত্তের নাভি S হয় এবং চলমান বিন্দু P হইতে নিয়ামকের উপর PM লম্ব হয়, তবে $\frac{SP}{PM}=e$ এবং SP<PM.

উপপাদ্য—১

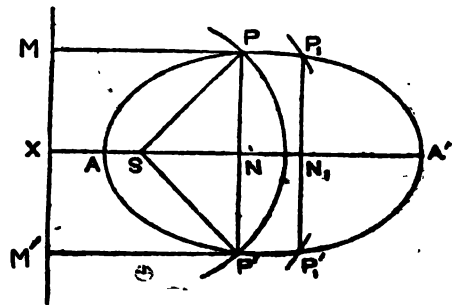
উপবৃত্তের নাভি, নিয়ামক এবং উৎকেন্দ্রতা দেওয়া আছে ; বক্রস্থ বিন্দুসমূহের অবস্থান নির্ণয় কর।

(Given the focus, the directrix and the eccentricity of an ellipse ; to determine any number of points on the curve.)

মনে কর উপবৃত্তের নাভি S, নিয়ামক MM′ এবং উৎকেন্দ্রতা e.

বক্র অঙ্কন করিতে হইবে ; অর্থাৎ বক্রস্থ বিন্দুসমূহ নির্ণয় করিতে হইবে।

নাভি S হইতে নিয়ামক MM′এর উপর SX লম্ব টান।

SXকে e: 1এর অনুপাতে অন্তঃ এবং বহির্বিভক্ত কর।

মনে কর অন্তঃস্থ ছেদবিন্দু A এবং বহিঃস্থ ছেদবিন্দু A′;

তবে $\frac{SA}{AX}=e$ এবং $\frac{SA'}{A'X}=e.$

সুতরাং A এবং A′ উভয়ই উপবৃত্তস্থ বিন্দু।

এইবার AA′এর উপর যে কোন বিন্দু N লও এবং Nএর মধ্য দিয়া AA′এর উপর লম্ব PNP′ আঁক।

Sকে কেন্দ্র ধরিয়া এবং e.XN ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক যাহা PNP′কে P এবং P′ বিন্দুতে ছেদ করে।

তবে P এবং P′ উপবৃত্তের উপর অবস্থিত হইবে।

PS এবং P′S যোগ কর এবং P ও P′ হইতে নিয়ামকের উপর যথাক্রমে PM এবং P′M′ লম্ব টান।

এখন $PS=e\cdot XN=e\cdot PM$ এবং $P'S=e\cdot XN=e\cdot P'M'$

সুতরাং $\frac{SP}{PM}=e$ এবং $\frac{SP'}{P'M'}=e.$

অতএব প্রমাণিত হইল যে, P এবং P′ উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।

অনুরূপভাবে AA′এর উপর আরেকটি বিন্দু N_1 লওয়া যাক। অক্ষের উপর $P_1N_1P'_1$ লম্ব টান। Sকে কেন্দ্র ধরিয়া এবং $e\cdot XN_1$ ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক যাহা $P_1N_1P_1'$কে P_1 এবং P_1' বিন্দুতে ছেদ করে।

তবে P_1 এবং P_1' উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।

এই উপায়ে অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত যতগুলি ইচ্ছা বিন্দু নির্ণয় করা যায়। তাহাদের শুধু হাতে বক্র দ্বারা যোগ করিলে উপবৃত্ত অঙ্কিত হইবে।

টীকা ঃ অঙ্কন পদ্ধতিতে Sকে কেন্দ্র ধরিয়া এবং $e\cdot XN$ ব্যাসার্দ্ধ লইয়া বৃত্তচাপ আঁকা হইয়াছে, যাহা PNP′কে P এবং P′ বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে।

যদি $SP<SN$ হয়, তাহা হইলে বৃত্তচাপ PNP′কে ছেদ করিতে পারে না।

সুতরাং SP অর্থাৎ $e\cdot XN$ কখনও SN অপেক্ষা ছোট হইতে পারে না।

মনে কর Sএর বামদিকে N বিন্দু লওয়া হইয়াছে।

তাহা হইলে যেহেতু $e\cdot XN$ কখনও SN অপেক্ষা ছোট হইতে পারে না,

সুতরাং e (XS − SN) কখনও SN অপেক্ষা ছোট হইতে পারে না ;

অর্থাৎ $e\cdot$XS কখনও $(1+e)$ SN অপেক্ষা ছোট হইতে পারে না।

কিন্তু $e\cdot XS = e(XA + AS) = AS + e\cdot AS = (1+e)AS.$

সুতরাং AS কখনও SN অপেক্ষা ছোট হইতে পারে না।

অতএব N নিশ্চয়ই SAএর উপর থাকিবে কিন্তু বর্দ্ধিত SAএর উপর থাকিতে পারে না।

পুনরায় মনে কর Sএর ডান দিকে N বিন্দু লওয়া হইয়াছে।

তাহা হইলে যেহেতু $e\cdot$XN কখনও SN অপেক্ষা ছোট হইতে পারে না,

সুতরাং e(XS + SN) কখনও SN অপেক্ষা ছোট হইতে পারে না ;

অর্থাৎ $e\cdot$XS কখনও $(1-e)$ SN অপেক্ষা ছোট হইতে পারে না।

কিন্তু $e\cdot XS = e(XA' - SA') = SA' - e\cdot SA' = (1-e)SA'.$

সুতরাং SA′ কখনও SN অপেক্ষা ছোট হইতে পারে না।

অতএব N নিশ্চয়ই SA′এর উপর থাকিবে কিন্তু বর্দ্ধিত SA′এর উপর থাকিতে পারে না।

এই দুইটি সিদ্ধান্ত একত্র করিলে পাওয়া যায় যে, N নিশ্চয়ই A এবং A′এর মধ্যে থাকিবে।

যেহেতু উপবৃত্তের বিন্দুসমূহ N বিন্দুর বিভিন্ন অবস্থিতির মধ্য দিয়া অক্ষের উপর লম্ব সমূহের উপর অবস্থিত এবং S হইতে তাহাদের দূরত্ব $e\cdot$XN, যাহা সসীম এবং কখনই অসীম হইতে পারে না, সুতরাং উপবৃত্ত একটি সসীম বক্র এবং কখনই অসীম হইতে পারে না।

অতএব উপবৃত্ত একটি বদ্ধ বক্র (closed curve) এবং অক্ষের উপর A এবং A′ বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব দুইটির মধ্যে সম্পূর্ণরূপে অবস্থিত।

সংজ্ঞা : সরল রেখা AA′ অর্থাৎ নাভি হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব সরল রেখার যে অংশ উপবৃত্তের মধ্যে থাকে তাহাকে **পরাক্ষ** (major axis) বলে। যে দুইটি বিন্দুতে এই অক্ষ উপবৃত্তকে ছেদ করে (অর্থাৎ A এবং A′) তাহাদের **শীর্ষ** (vertices) বলে। অক্ষের মধ্য বিন্দুকে উপবৃত্তের **কেন্দ্র** (centre) বলা হয়।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ—পরাক্ষ উপবৃত্তের প্রতিসাম্যাক্ষ।

PNP′ জ্যা পরাক্ষের উপর N বিন্দুতে লম্ব। Sকে কেন্দ্র করিয়া $e \cdot XN$ ব্যাসার্দ্ধ লইয়া যে বৃত্তচাপ আঁকা হইয়াছে, তাহা PNP′কে P এবং P′ বিন্দুতে ছেদ করে।

সুতরাং $SP = SP' = e \cdot XN$.

এখন PSN এবং P′SN ত্রিভুজদ্বয়ে $SP = SP'$; $\angle PNS = \angle P'NS$ = এক সমকোণ এবং SN সাধারণ বাহু। সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম।

অতএব $PN = P'N$.

AA′এর মধ্যে পরাক্ষের উপর N বিন্দু যেখানেই লওয়া যাক না কেন, PN সর্ব্বদাই P′Nএর সমান হইবে। সুতরাং বলা যায় যে, উপবৃত্ত পরাক্ষের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

অতএব পরাক্ষ উপবৃত্তের প্রতিসাম্যাক্ষ।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। প্রমাণ কর যে উপবৃত্তের অক্ষ বক্রকে মাত্র দুইটি বিন্দুতেই ছেদ করিতে পারে।

যদি সম্ভব হয়, মনে কর অক্ষ উপবৃত্তকে তৃতীয় বিন্দু Pতে ছেদ করিল, যাহা A এবং A′ হইতে ভিন্ন। তাহা হইলে P বিন্দু S এবং A অথবা S এবং A′এর মধ্যে পড়িবে।

(ক) মনে কর P বিন্দু S এবং Aর মধ্যে পড়ে;

তবে $SA = e \cdot AX$ এবং $SP = e \cdot PX$,

সুতরাং $SA - SP = e(AX - PX)$, অর্থাৎ $AP = -eAP$.

$\therefore \quad AP(1 + e) = o.$

কিন্তু $1+e=0$ হইতে পারে না, সুতরাং $AP=0$ হইতে হইবে। কিন্তু তাহাও অসম্ভব, কারণ A এবং P ভিন্ন।

অতএব যে সিদ্ধান্ত পাওয়া গিয়াছে তাহা অসম্ভব।

(খ) এইবার মনে কর P বিন্দু S এবং A'এর মধ্যে পড়ে;

তবে $SA'=e\cdot A'X$ এবং $SP=e\cdot PX$,

সুতরাং $SA'-SP=e\,(A'X-PX)$, অর্থাৎ $A'P=e\cdot A'P$.

$\therefore \quad A'P(1-e)=0$

কিন্তু $1-e=0$ হইতে পারে না, সুতরাং $A'P=0$ হইতে হইবে। কিন্তু তাহাও অসম্ভব, কারণ A' এবং P ভিন্ন।

সুতরাং এইবারও যে সিদ্ধান্ত পাওয়া গিয়াছে তাহা অসম্ভব।

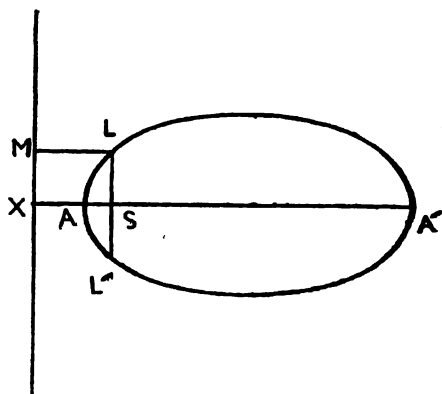
অতএব অক্ষ উপবৃত্তকে মাত্র দুইটি বিন্দুতেই ছেদ করিতে পারে।

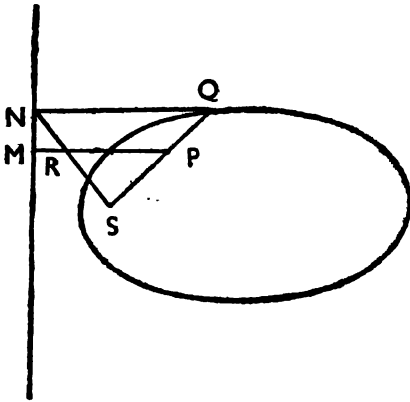
উদাঃ ২। যদি SL অক্ষের উপর লম্ব হয়, প্রমাণ কর যে $SL=(1+e)AS$.

$$SL=e\cdot LM=e\cdot XS$$
$$=e(XA+AS)$$
$$=e\cdot XA+e\cdot AS$$
$$=AS+e\cdot AS$$
$$=(1+e)AS.$$

অতএব নাভিলম্ব LL'

$$=2(1+e)AS.$$

M L X A S A' L'

উদাঃ ৩। P বিন্দু উপবৃত্তের মধ্যে থাকিলে $SP<e\cdot PM$, এবং বাহিরে থাকিলে $SP>e\cdot PM$.

(ক) মনে কর P বিন্দু উপবৃত্তের মধ্যে আছে ; SP যোগ করিয়া বর্দ্ধিত কর যাহাতে বক্রকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

P এবং Q হইতে নিয়ামকের উপর PM এবং QN লম্ব টান।

NS যোগ কর, এবং মনে কর, ইহা PMকে R বিন্দুতে ছেদ করে।

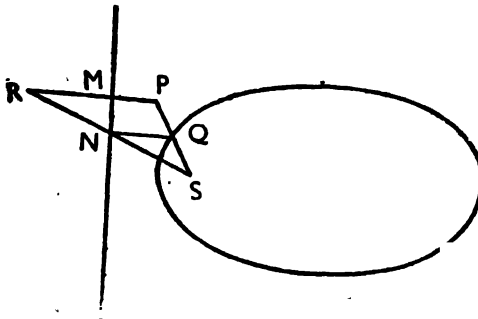
ত্রিভুজদ্বয়, SPR এবং SQN সদৃশ্য ;

স্থতরাং $\frac{SP}{PR} = \frac{SQ}{QN} = e.$

কিন্তু $PR < PM$

স্থতরাং $e \cdot PR < e \cdot PM$

অতএব $SP < e \cdot PM.$

(খ) মনে কর P বিন্দু উপবৃত্তের বাহিরে আছে ; SP যোগ কর যাহাতে বক্রকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

P এবং Q হইতে নিয়ামকের উপর PM এবং QN লম্ব টান।

SN যোগ করিয়া বর্দ্ধিত করিলে মনে কর বর্দ্ধিত PMকে R বিন্দুতে ছেদ করে।

ত্রিভুজদ্বয় SPR এবং SQN সদৃশ ;

সুতরাং $\frac{SP}{PR} = \frac{SQ}{QN} = e.$

কিন্তু $PR > PM$

সুতরাং $e \cdot PR > e \cdot PM$

অতএব $SP > e \cdot PM.$

প্রশ্নমালা

১। উপবৃত্ত আঁক, দেওয়া আছে ;

(ক) উৎকেন্দ্রতা, নিয়ামক এবং বক্রস্থ দুইটি বিন্দু। (দুইটি উপবৃত্ত আঁকা যাইবে।)

(খ) উৎকেন্দ্রতা, নাভি এবং পরাক্ষ ও নিয়ামকের ছেদ বিন্দু।

(গ) উৎকেন্দ্রতা, নাভি এবং বক্রস্থ দুইটি বিন্দু।

(ঘ) উৎকেন্দ্রতা, নাভি এবং শীর্ষ।

(ঙ) উৎকেন্দ্রতা, শীর্ষ এবং পরাক্ষ ও নিযামকের ছেদ বিন্দু।

(চ) উৎকেন্দ্রতা, শীর্ষ এবং নিয়ামক।

২। উপবৃত্তের অক্ষের উপর সমভাবে নত দুইটি নাভিগ জ্যা দৈর্ঘ্যে সমান।

৩। যদি একটি অধিবৃত্ত ও একটি উপবৃত্তের নাভি ও নিয়ামক সাধারণ হয়, প্রমাণ কর যে, অধিবৃত্ত সম্পূর্ণরূপে উপবৃত্তের বাহিরে থাকিবে।

৪। যদি A বিন্দুর মধ্য দিয়া অক্ষের উপর লম্ব, SM সরল রেখাকে Y বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, $SY = e \cdot YM$, এবং SPM কোণকে PY দ্বিখণ্ডিত করে, যেখানে PM উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু P হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব।

৫। যদি উপবৃত্তের যে কোন জ্যা QQ′কে বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে D বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, (ক) $SQ : SQ' = QD : Q'D$; (খ) SD, QSQ′ কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক।

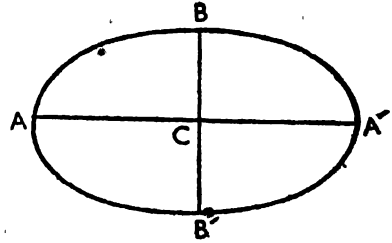
৬। যদি উপবৃত্তের যে কোন নাভিগ জ্যা PSP'কে বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে D বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, (ক) SP:SP' = PD:P'D ; (খ) $\frac{1}{SP}+\frac{1}{SP'}=\frac{2}{SL}$.

৭। যদি A এবং A'এর মধ্য দিয়া নিয়ামকের সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয় SMকে Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে $\angle QPR$ = এক সমকোণ, যেখানে PM, উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু P হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব।

৮। যদি MP উপবৃত্তকে পুনরায় P' বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, P, P', R, Q সমবৃত্ত।

৯। কোন উপবৃত্তের নাভিলম্ব = 4 ইঞ্চ এবং শীর্ষ হইতে নিকটতর নাভির দূরত্ব = 1·5 ইঞ্চ ; উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1944.]

সংজ্ঞা ঃ পরাক্ষের মধ্যবিন্দু অর্থাৎ উপবৃত্তের কেন্দ্রের মধ্য দিয়া পরাক্ষের উপর লম্ব সরল রেখার যে অংশ উপবৃত্তের মধ্যে থাকে, তাহাকে উপাক্ষ (minor axis) বলে।

চিত্রে AA′ পরাক্ষ, C কেন্দ্র এবং BB′ উপাক্ষ।

উপপাদ্য—২

উপবৃত্ত উপাক্ষের পার্শ্বদ্বয়ে প্রতিসম।

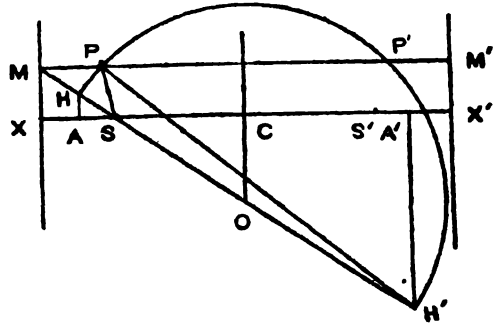
(An ellipse is symmetrical about its minor axis.)

মনে কর উপবৃত্তের নিয়ামক MX, নাভি S এবং পরাক্ষ AA′.

M নিয়ামকের উপর যে কোন একটি বিন্দু।

A এবং A′ বিন্দুর মধ্য দিয়া পরাক্ষের উপর লম্ব দুইটি সরল রেখা আঁক, যাহারা MSকে H এবং H′ বিন্দুতে ছেদ করে।

HH′কে ব্যাস ধরিয়া একটি বৃত্ত আঁক।

Mএর মধ্য দিয়া নিয়ামকের উপর লম্ব একটি সরল রেখা টান, যাহা বৃত্তকে P এবং P′ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন ত্রিভুজদ্বয় SHA এবং SXM সদৃশ ;

সুতরাং $\frac{HS}{HM}=\frac{AS}{AX}=e$;

পুনরায় ত্রিভুজদ্বয় SH′A′ এবং SXM সদৃশ ;

সুতরাং $\frac{H'S}{SM}=\frac{A'S}{AX}$; অর্থাৎ $\frac{H'S}{H'M}=\frac{A'S}{A'X}=e$;

যেখানে e উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা।

অতএব H এবং H′, একই অনুপাতে MSকে অন্তঃ এবং বহির্বিভক্ত করে।

আবার জ্যামিতি হইতে পাওয়া যায়, $\frac{PS}{PM}=\frac{HS}{HM}$, কারণ HH′ ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্তের উপর P অবস্থিত।

অতএব $\frac{PS}{PM}=e$; অর্থাৎ P বিন্দু উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, P′ বিন্দুও উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।

এখন যদি HH′এর মধ্যবিন্দু O হয় এবং AA′এর মধ্যবিন্দু C হয়, তবে OC, AH এবং A′H′ সমান্তরাল ;

সুতরাং AA′এর উপর OC লম্ব।

অতএব Oকে কেন্দ্র করিয়া যে বৃত্ত আঁকা হইয়াছে তাহার PP′ জ্যার উপরও OC লম্ব, কারণ PP′ এবং AA′ সমান্তরাল।

পুনরায় কেন্দ্র হইতে লম্ব বৃত্তের জ্যাকে দ্বিখণ্ডিত করে, অতএব OC, PP′কে লম্বভাবে দ্বিখণ্ডিত করিতেছে।

কিন্তু OC উপবৃত্তের কেন্দ্রের মধ্য দিয়া পরাক্ষের উপর লম্ব, সুতরাং সংজ্ঞানুযায়ী ইহা উপাক্ষের সহিত এক।

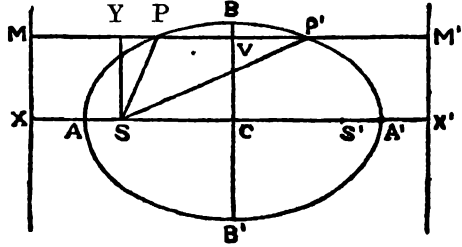
আবার যেহেতু P এবং P′ উপবৃত্তের উপর অবস্থিত এবং PP′ উপাক্ষের উপর লম্ব, সুতরাং বলা যায় যে, উপবৃত্তের উপাক্ষের উপর লম্ব জ্যা সমূহকে উপাক্ষ দ্বিখণ্ডিত করে।

অতএব উপাক্ষের ডানদিক এবং বামদিক প্রতিসম ; অর্থাৎ উপবৃত্ত উপাক্ষের পার্শ্বদ্বয়ে প্রতিসম।

বিকল্প প্রমাণ :

মনে কর উপবৃত্তের নাভি S, নিয়ামক MX এবং AA′এর সমান্তরাল PP′ একটি জ্যা, যাহার মধ্য-বিন্দু V.

মনে কর P′P বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে M বিন্দুতে ছেদ করে।

S হইতে PP′এর উপর SY লম্ব টান।

SP এবং SP′ যোগ কর।

যেহেতু P এবং P′ উপবৃত্তের উপর অবস্থিত, সুতরাং $SP=e\cdot PM$ এবং $SP'=e\cdot P'M$.

$$\therefore\ \frac{SP}{PM}=\frac{SP'}{P'M}=e.$$

তাহা হইলে, $\dfrac{SP^2}{PM^2}=\dfrac{SP'^2}{P'M^2}=\dfrac{SP'^2-SP^2}{P'M^2-PM^2}$.

আবার $SP'^2-SP^2=(P'Y^2+SY^2)-(PY^2+SY^2)=P'Y^2-PY^2$

$$=(P'Y+PY)(P'Y-PY)=2PP'\cdot YV.$$

এবং $P'M^2-PM^2=(P'M+PM)(P'M-PM)=2MV\cdot PP'$.

সুতরাং $\dfrac{SP^2}{PM^2}=\dfrac{2PP'\cdot YV}{2MV\cdot PP'}$.

এখন $\dfrac{SP}{PM}=e$ অর্থাৎ ধ্রুব, সুতরাং PP′এর সমান্তরাল সকল জ্যার জন্যই $\dfrac{YV}{MV}$ ও ধ্রুব।

পুনরায় যেহেতু $\dfrac{YV}{MV}$ ধ্রুব, সুতরাং $\dfrac{MV}{YV}$ ও ধ্রুব, অর্থাৎ $\dfrac{MY}{YV}$ ও ধ্রুব।

এখন MY ধ্রুব $=XS$; সুতরাং YV ও ধ্রুব।

S একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং SY নিয়ামকের সমান্তরাল;

অতএব Vএর সঞ্চারপথ নিশ্চয়ই BCB′ যাহা AA′এর উপর লম্ব।

যেহেতু AA′ এবং PP′ সমান্তরাল, সুতরাং AA′এর মধ্যবিন্দু BCB′এর উপর অবস্থিত।

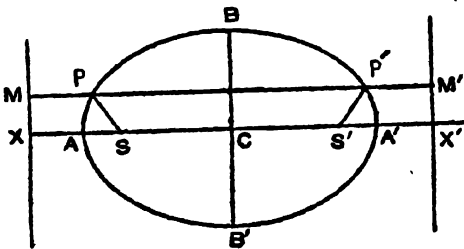
অতএব BCB′ সকল লম্ব জ্যাকেই দ্বিখণ্ডিত করে।

অতএব উপবৃত্ত উপাক্ষের পার্শ্বদ্বয়ে প্রতিসম।

টীকা: যেহেতু উপাক্ষ উপবৃত্তের প্রতিসাম্যাক্ষ, সুতরাং বক্রকে যদি উপাক্ষের উপর দিয়া ভাঁজ করা যায় তবে এক অংশের সহিত অপর অংশের সমাপতন ঘটিবে। অতএব যদি AA′এর উপর একটি বিন্দু S′ লওয়া যায় যাহাতে A′S′ = AS এবং AA′কে বর্দ্ধিত করিয়া তাহার উপর একটি বিন্দু X′ লওয়া যায় যাহাতে A′X′ = AX, তবে S′কে নাভি ধরিয়া এবং X′এর মধ্য দিয়া অক্ষের উপর লম্ব M′X′কে নিয়ামক ধরিয়া একই উপবৃত্ত আঁকা যাইতে পারে।

অতএব উপবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি এবং দ্বিতীয় নিয়ামক আছে।

এই সিদ্ধান্তটিকে আর একভাবেও প্রমাণ করা যায়।

মনে কর S উপবৃত্তের নাভি এবং MX নিয়ামক। S হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব টান এবং বর্দ্ধিত কর যাহাতে উপবৃত্তকে A এবং A′ বিন্দুতে ছেদ করে। মনে কর AA′এর মধ্য বিন্দু C এবং BCB′ উপবৃত্তের উপাক্ষ।

পরাক্ষের উপর CS′ = CS এবং CX′ = CX কাটিয়া লও। X′এর মধ্য দিয়া পরাক্ষের উপর M′X′ লম্ব টান। তাহা হইলে S′ দ্বিতীয় নাভি এবং M′X′ দ্বিতীয় নিয়ামক।

মনে কর P উপবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। Pএর মধ্য দিয়া অক্ষের সমান্তরাল একটি সরল রেখা আঁক যাহা উপবৃত্তকে আর একটি বিন্দু P'এ এবং MX ও $M'X'$কে যথাক্রমে M ও M'এ ছেদ করে। এইবার BCB'এর উপর দিয়া উপবৃত্তকে ভাঁজ কর। তাহা হইলে যেহেতু $CS = CS'$ এবং $\angle BCS = \angle BCS'$ = এর সমকোণ ; সুতরাং S, S'এর উপর পড়িবে।

অনুরূপ ভাবে দেখা যায় X, X'এর উপর পড়িবে।

আবার যেহেতু $\angle MXC = \angle M'X'C$ = এক সমকোণ, সুতরাং MX, $M'X'$ উপর পড়িবে। উপাক্ষ প্রতিসাম্যাক্ষ, সুতরাং P,P'এর উপর এবং M,M'এর উপর পড়িবে।

অতএব $SP = S'P'$ এবং $MP = M'P'$.

কিন্তু PM এবং $P'M'$ যথাক্রমে উপবৃত্তস্থ P এবং P' বিন্দু হইতে নিয়ামক MX এবং $M'X'$এর উপর লম্ব।

$$\therefore \quad \frac{SP}{PM} = \frac{S'P'}{P'M'} = e.$$

অতএব সংজ্ঞা অনুসারে উপবৃত্তের S' দ্বিতীয় নাভি এবং $M'X'$ দ্বিতীয় নিয়ামক।

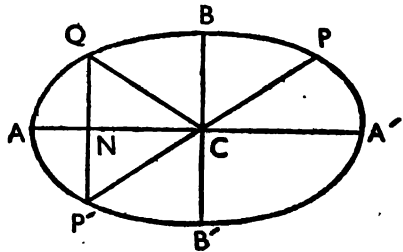
উদাহরণমালা

উদাঃ ১। উপবৃত্তের কেন্দ্রগামী সকল জ্যা কেন্দ্রে দ্বিখণ্ডিত হয়।

মনে কর PCP' জ্যা কেন্দ্রের মধ্য দিয়া যায়।

একটি সরল রেখা CQ এমন ভাবে আঁক, যাহাতে $\angle BCQ = \angle BCP$ হয়, এবং মনে কর CQ উপবৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

$P'Q$ যোগ কর।

এখন CP এবং CQ উপাক্ষের উপর সমভাবে নত বলিয়া দৈর্ঘ্যে সমান ; অর্থাৎ $PC = QC$.

পুনরায় $\angle PCB = \angle P'CB'$;

সুতরাং $\angle QCN = \angle P'CN$, কারণ ইহারা সমান কোণের পূরক।

QC এবং P′C পরাক্ষের উপর সমভাবে নত বলিয়া দৈর্ঘ্যে সমান ;

অর্থাৎ $QC = P'C$.

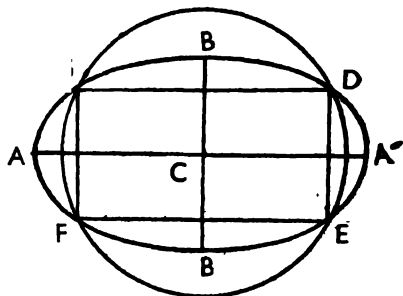
সুতরাং $PC = P'C$.

অতএব কেন্দ্রগামী জ্যা PP′ উপবৃত্তের কেন্দ্র Cতে দ্বিখণ্ডিত হয়।

উদাঃ ২। উপবৃত্ত এবং তাহার কেন্দ্র দেওয়া আছে ; পরাক্ষ এবং উপাক্ষ নির্ণয় কর।

উপবৃত্তের কেন্দ্র Cকে কেন্দ্র ধরিয়া এবং যে কোন সুবিধামত ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক, যাহা উপবৃত্তকে D, E, F, G বিন্দুতে ছেদ করে।

DE ও FGএর মধ্য-বিন্দুদ্বয় যোগ করিলে পরাক্ষ AOA′, এবং GD ও EFএর মধ্য-বিন্দুদ্বয় যোগ করিলে উপাক্ষ BOB′ পাওয়া যাইবে।

(প্রমাণ কর।)

প্রশ্নমালা

১। উপবৃত্ত ও তাহার নাভি দেওয়া আছে ; পরাক্ষ ও উপাক্ষ নির্ণয় কর।

২। উপাক্ষের উপরিস্থ যে কোন বিন্দু হইতে সমভাবে নত দুইটি সরল রেখা উপবৃত্ত পর্য্যন্ত আঁকিলে, তাহারা দৈর্ঘ্যে সমান হইবে।

৩। যে কোন জ্যা যাহা অক্ষের উপর লম্ব নহে, অক্ষদ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইলে ছেদবিন্দু উপবৃত্তের কেন্দ্র।

৪। জ্যা PP′ পরাক্ষের সমান্তরাল এবং জ্যা P′Q উপাক্ষের সমান্তরাল হইলে জ্যা PQ উপবৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

৫। সমকেন্দ্রিক বৃত্ত ও উপবৃত্তের সাধারণ জ্যা অক্ষের সমান্তরাল অথবা কেন্দ্রগামী।

৬। উপবৃত্তের কেন্দ্রিক দুইটি জ্যাএর প্রান্ত যোগ করিলে সামন্তরিক হয়।

৭। উপবৃত্তের দুইটি নাভি এবং উপাক্ষের প্রান্ত যোগ করিলে রম্বস হয়।

উপপাদ্য—৩

যে কোন উপবৃত্তে, (ক) $CA = e \cdot CX$; (খ) $CS = e \cdot CA$; (গ) $CS \cdot CX = CA^2$.

(In an ellipse (i) $CA = e \cdot CX$; (ii) $CS = e \cdot CA$; (iii) $CS \cdot CX = CA^2$.)

মনে কর উপবৃত্তের S, S′ দুইটি নাভি A, A′ দুইটি শীর্ষ, MX, M′X′ দুইটি নিয়ামক এবং C কেন্দ্র।

যেহেতু A এবং A′ উপবৃত্তের উপর অবস্থিত ; সুতরাং $SA = e \cdot AX$, এবং $SA' = e \cdot A'X = e \cdot AX'$.

$\therefore \quad SA + SA' = e(AX + AX')$ [যোগ করিয়া]

অর্থাৎ, $AA' = eXX'$.

কিন্তু $AA' = 2CA$, এবং $XX' = 2CX$.

অতএব $CA = e \cdot CX$.

পুনরায় $SA' - SA = e(AX' - AX)$ [বিয়োগ করিয়া]

অর্থাৎ $SS' + S'A' - SA = e(AA' + A'X' - AX)$

কিন্তু $S'A' = SA$, এবং $A'X' = AX$,

সুতরাং $SS' = e \cdot AA'$.

কিন্তু $SS' = 2CS$, এবং $AA' = 2CA$.

অতএব, $CS = e \cdot CA$.

এখন $CA = e \cdot CX$, এবং $e \cdot CA = CS$

সুতরাং গুণ করিলে, $CA \cdot e \cdot CA = e \cdot CX \cdot CS$,

অতএব $CS \cdot CX = CA^2$.

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। নাভি ও উপাক্ষের প্রান্তের সংযোজক দৈর্ঘ্যে পরাক্ষের অর্দ্ধ।

[কঃ বিঃ 1932.]

মনে কর উপবৃত্তের নাভি S, পরাক্ষ AA′ এবং উপাক্ষ BB′. SB যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $SB = \frac{1}{2}AA'$.

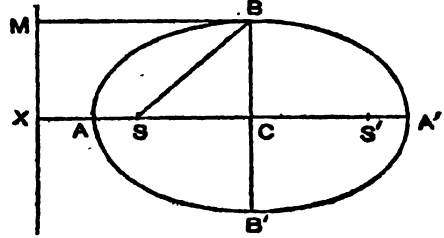
B হইতে নিয়ামক MXএর উপর BM লম্ব টান।

B উপবৃত্তের উপর অবস্থিত,

$\therefore \quad SB = e \cdot BM$

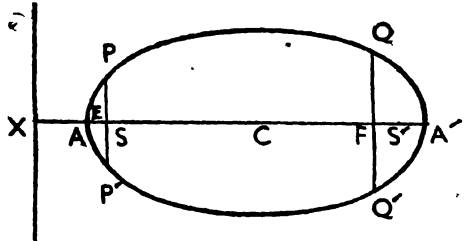
কিন্তু $BM = CX$ এবং $CA = e \cdot CX$,

সুতরাং $e \cdot BM = e \cdot CX = CA$.

অতএব $SB = CA = \frac{1}{2}AA'$.

উদাঃ ২। উপবৃত্ত, উৎকেন্দ্রতা ও একটি নিয়ামক দেওয়া আছে; কেন্দ্র ও নাভি নির্ণয় কর।

নিয়ামকের সমান্তরাল দুইটি জ্যা PP′ এবং QQ′ আঁক। তাহাদের মধ্য-বিন্দুদ্বয় E, F যোগ কর এবং মনে কর উহা বর্দ্ধিত করিলে উপবৃত্তকে A এবং A′ বিন্দুতে ছেদ করে।

AA′ উপবৃত্তের পরাক্ষ।

AA′কে C বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর।

C উপবৃত্তের কেন্দ্র।

CA এবং CA′ হইতে যথাক্রমে $CS = e \cdot CA$ এবং $CS' = e \cdot CA' = e \cdot CA$ কাটিয়া লও।

তাহা হইলে S এবং S′ উপবৃত্তের দুইটি নাভি।

প্রশ্নমালা

১। প্রমাণ কর যে, $CB^2 = CS \cdot CX(1 - e^2)$.

২। উপবৃত্ত, উৎকেন্দ্রতা এবং কেন্দ্র দেওয়া আছে; নাভিদ্বয় নির্ণয় কর।

৩। উপবৃত্ত এবং একটি নাভি দেওয়া আছে; কেন্দ্র এবং উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

৪। প্রমাণ কর যে, যে কোন উপবৃত্তে (ক) $CS = e^2 . CX$; (খ) $AS = (1 - e) CA$; (গ) নাভিলম্ব $= (1 - e^2) AA'$.

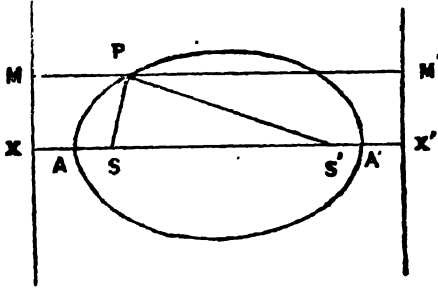
উপপাদ্য—৪

উপবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুর নাভিগ দূরত্বের যোগফল ধ্রুব এবং পরাক্ষের সমান।

(The sum of the focal distances of any point on an ellipse is a constant and is equal to the major axis.)

মনে কর S এবং S′ উপবৃত্তের দুইটি নাভি এবং MX ও M′X′ দুইটি নিয়ামক। AA′ উপবৃত্তের পরাক্ষ এবং P উপবৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু। PS এবং PS′ যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $SP + S'P = AA'$.

P বিন্দুর মধ্য দিয়া নিয়ামকের উপর MPM′ লম্ব টান, যাহা নিয়ামকদের M এবং M′এ ছেদ করে।

P উপবৃত্তের উপর অবস্থিত, অতএব $SP = e PM$ এবং $S'P = e.PM'$.

যোগ করিলে, $SP + S'P = e(PM + PM')$

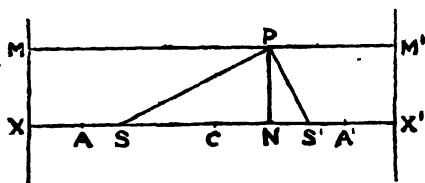
$$= e.MM' = e.XX' = AA'.$$

অনুসিদ্ধান্ত : $SB + S'B = AA'$; কিন্তু $SB = S'B$,

অতএব $SB = \frac{1}{2}AA' = CA$.

বিপরীত উপপাদ্য

যদি কোন বিন্দু কোন সমতলের উপর এমন ভাবে নড়িয়া বেড়ায় যে সেই সমতলস্থ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে তাহার দূরত্বের যোগফল ধ্রুব হয়, তবে বিন্দুটির সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত ও উহার নাভিদ্বয় ঐ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

মনে কর S এবং S' দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু এবং P এমন একটি চলমান বিন্দু যে $SP+S'P$ ধ্রুব ;

প্রমাণ করিতে হইবে যে, Pএর সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত, যাহার নাভিদ্বয় S এবং S'.

মনে কর $SP+S'P=2a$, যেখানে a যে কোন একটি ধ্রুবক। SS'কে C বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। CS এবং CS'কে যথাক্রমে A এবং A' বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর, যাহাতে $CA=CA'=a$ হয়। তবে অনুপাত $\frac{CS}{CA}$ একটি ধ্রুবক $=e$ মনে কর। CA এবং CA'কে যথাক্রমে X এবং X' বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর, যাহাতে $e\cdot CX=CA$ এবং $e\cdot CX'=CA'$ হয়। X এবং X'এর মধ্য দিয়া XX'এর উপর লম্ব MX এবং $M'X'$ আঁক। SP এবং $S'P$ যোগ কর P হইতে SS' এর উপর PN লম্ব টান। Pএর মধ্য MX ও $M'X'$ উপর লম্ব MPM' সরলরেখা আঁক।

এখন $SP^2=PN^2+SN^2$, এবং $S'P^2=PN^2+S'N^2$,

সুতরাং $S'P^2-SP^2=S'N^2-SN^2$,

অর্থাৎ $(S'P+SP)(S'P-SP)=(S'N+SN)(S'N-SN)$.

কিন্তু $S'P+SP=2a$

এবং $S'N-SN=(S'C+CN)-(SC-CN)=2CN$.

সুতরাং $2a(S'P-SP)=SS'\cdot 2CN=4CS\cdot CN$.

অতএব, $S'P-SP=\frac{4CS\cdot CN}{2a}=2\frac{CS}{CA}\cdot CN=2e\cdot CN$.

এখন $S'P+SP=2a=2CA$

সুতরাং যোগ করিলে,

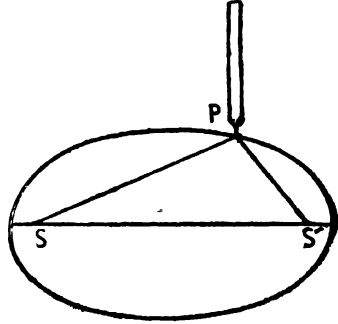
$S'P=CA+e\cdot CN=e\cdot CX'+e\cdot CN=e(CX'+CN)=e\cdot X'N=e\cdot PM'$;

এবং বিয়োগ করিলে,

$SP=CA-e\cdot CN=e\cdot CX-e\cdot CN=e(CX-CN)=e\cdot XN=e\cdot PM.$

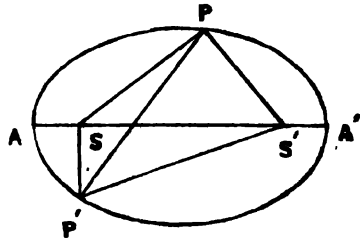
অতএব, P বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত, যাহার নাভিদ্বয় S এবং S′, নিয়ামকদ্বয় MX এবং M′X′ এবং উৎকেন্দ্রতা অর্থাৎ $\frac{CS}{CA}=e$.

যান্ত্রিক পদ্ধতিতে উপবৃত্ত অঙ্কন ঃ

একটি সূতার দুই প্রান্তকে সমতল কাগজের উপর দুইটি বিন্দু S এবং S′এ আটকাইয়া দাও ; SS′ যেন সূতার দৈর্ঘ্যাপেক্ষা ছোট হয়। একটি পেন্সিলকে সূতার মধ্যে এমনভাবে ঠেলিয়া ধর, যাহাতে সূতার দুইটি অংশ SP এবং S′P টান থাকে। সূতাকে সর্ব্বদা টান রাখিয়া পেন্সিল সরাইতে থাকিলে একটি বক্র অঙ্কিত হয়।

যেহেতু SP + S′P = ধ্রুব = সূতার দৈর্ঘ্য, সুতরাং বক্রটি উপবৃত্ত যাহার নাভিদ্বয় S এবং S′.

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। প্রমাণ কর যে পরাক্ষ উপবৃত্তের বৃহত্তম জ্যা। [কঃ বিঃ 1934.]

মনে কর AA′ উপবৃত্তের পরাক্ষ, S ও S′ ইহার দুইটি নাভি এবং PP′ যে কোন একটি জ্যা।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AA′ > PP′.

PS, PS′ এবং P′S, P′S′ যোগ কর।

PSP′ ত্রিভুজে $PS + P'S > PP'$.

এবং PS′P′ ত্রিভুজে $PS' + P'S' > PP'$.

সুতরাং যোগ করিলে, $PS + P'S + PS' + P'S' > 2PP'$.

কিন্তু $PS + PS' = AA'$ এবং $P'S + P'S' = AA'$.

অতএব $2AA' > 2PP'$; অর্থাৎ $AA' > PP'$.

অতএব পরাক্ষ উপবৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

উদাঃ ২। উপবৃত্তের নাভি দুইটির সমাপতন ঘটিলে উপবৃত্ত বৃত্তে রূপান্তরিত হয়। [কঃ বিঃ 1934, '37]

মনে কর AA′ উপবৃত্তের পরাক্ষ, S ও S′ দুইটি নাভি, C কেন্দ্র এবং P বক্রস্থ একটি বিন্দু।

SP, CP এবং S′P যোগ কর।

এখন $SP + S'P = AA'$

যখন S এবং S′ ক্রমাগত কাছে আসিয়া মিলিয়া যাইবে, তখন তাহাদের সমাপতন C বিন্দুতেই ঘটিবে, কারণ SA সর্ব্বদাই SA′এর সমান। সীমান্ত অবস্থায় SP এবং S′P ও মিলিয়া যাইবে এবং তাহাদের সমাপতন ঘটিবে CPএর উপর।

সুতরাং $2CP = AA' = 2CA$; অর্থাৎ $CP = CA = CA$.

কিন্তু P বক্রস্থ যে কোন একটি বিন্দু। সুতরাং C হইতে বক্রস্থ সকল বিন্দুর দূরত্ব CA.

অতএব উপবৃত্ত বৃত্তে রূপান্তরিত হইল, যাহার কেন্দ্র C এবং ব্যাসার্দ্ধ CA.

উদাঃ ৩। P বিন্দু উপবৃত্তের ভিতরে, উপরে অথবা বাহিরে থাকিলে $SP + S'P$ যথাক্রমে PP′ হইতে ক্ষুদ্রতর, সমান অথবা বৃহত্তর হইবে।

[কঃ বিঃ 1930.]

(ক) মনে কর P বিন্দু উপবৃত্তের ভিতরে আছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $SP + S'P < AA'$.

SP এবং S'P যোগ কর; মনে কর বর্দ্ধিত S'P উপবৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

QS যোগ কর।

এখন $SQ + QP > SP$

সুতরাং $SQ + QP + S'P > SP + S'P$,

অর্থাৎ $SQ + S'Q > SP + S'P$.

অতএব $SP + S'P < AA'$.

(খ) P বিন্দু যদি উপবৃত্তের উপর থাকে তবে $SP + S'P = AA'$, উপপাদ্যে প্রমাণিত হইয়াছে।

(গ) মনে কর P বিন্দু উপবৃত্তের বাহিরে আছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $SP + S'P > AA'$.

SP এবং S'P যোগ কর;

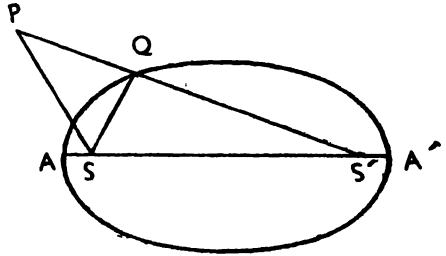
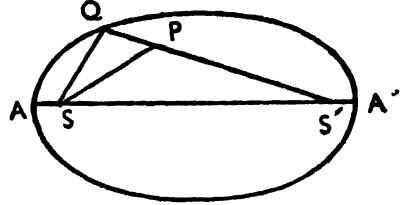
মনে কর S'P উপবৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

QS যোগ কর।

এখন, $SP + PQ > SQ$

সুতরাং $SP + PQ + QS' > SQ + S'Q$,

অর্থাৎ $SP + S'P > SQ + S'Q$.

অতএব $SP + S'P > AA'$.

প্রশ্নমালা

১। উপবৃত্তের নাভি হইতে উপাক্ষের দূরত্ব অর্দ্ধ-পরাক্ষের সমান।
[কঃ বিঃ 1932.]

২। ত্রিভুজের ভূমি এবং দুই বাহুর যোগফল দেওয়া আছে; শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৩। উপবৃত্তের উপর P একটি বিন্দু; কখন $\angle SPS'$ বৃহত্তম হইবে?

৪। দুইটি উপবৃত্তর নাভিদ্বয় সাধারণ হইলে তাহারা পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে না।

৫। যদি একটি উপবৃত্ত সম্পূর্ণভাবে আর একটি উপবৃত্তের মধ্যে থাকে তবে প্রথমটির পরাক্ষ দ্বিতীয়টির পরাক্ষ অপেক্ষা ছোট।

৬। দুইটি উপবৃত্তের একটি নাভি সাধারণ এবং পরাক্ষ সমান হইলে তাহারা পরস্পরকে দুইটির অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না। [কঃ বিঃ 1944.]

৭। উপবৃত্তস্থ একটি বিন্দু, একটি নাভি এবং পরাক্ষের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; কেন্দ্র নির্ণয় কর।

৮। একটি বৃত্ত সম্পূর্ণরূপে আর একটি বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত; উভয়কে স্পর্শ করে এমন বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত।

৯। দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করে; উভয়কে স্পর্শ করে এমন বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত যাহার নাভিদ্বয় প্রদত্ত বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র।

১০। একটি বৃত্ত সম্পূর্ণরূপে অন্য একটি বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত; উভয় বৃত্তের পরিধি হইতে সমদূরবর্ত্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত যাহার নাভিদ্বয় প্রদত্ত বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র।

উপপাদ্য—৫

যে কোন উপবৃত্তে $CB^2 = CA^2 - CS^2 = SA \cdot SA'$.

(In an ellipse $CB^2 = CA^2 - CS^2 = SA \cdot SA'$.)

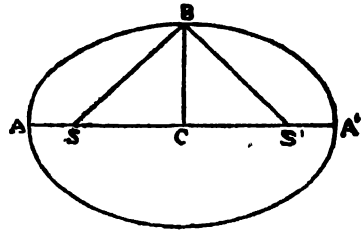
মনে কর উপবৃত্তের S ও S′ দুইটি নাভি A ও A′ দুইটি শীর্ষ, C কেন্দ্র এবং CB অর্দ্ধ-উপাক্ষ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$CB^2 = CA^2 - CS^2 = SA \cdot SA'$.

SB এবং S′B যোগ কর।

$SB = S'B$.

B উপবৃত্তস্থ বিন্দু বলিয়া $SB + S'B = AA'$

সুতরাং $2SB = 2CA$,

অর্থাৎ $SB = CA$.

ত্রিভুজ BCS সমকোণী,

সুতরাং
$$\begin{aligned} CB^2 &= SB^2 - CS^2 \\ &= CA^2 - CS^2 \\ &= (CA - CS)(CA + CS) \\ &= (CA - CS)(CA' + CS) \\ &= SA \cdot SA'. \end{aligned}$$

টীকা : $CB^2 = SA \cdot SA'$, সুতরাং উপপাদ্যটিকে এইভাবেও প্রকাশ করা যায় :—উপবৃত্তের অর্দ্ধ-উপাক্ষ, নাভি দ্বারা বিভক্ত পরাক্ষের অংশ দুইটির মধ্যানুপাতী।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। প্রমাণ কর যে, যে কোন উপবৃত্তে $e^2 = 1 - \dfrac{CB^2}{CA^2}$.

[কঃ বিঃ 1936.]

$CB^2 = CA^2 - CS^2$ এবং $CS = e \cdot CA$;

সুতরাং $CB^2 = CA^2 - e^2 \cdot CA^2 = (1 - e^2)CA^2$

অতএব, $e^2 = 1 - \dfrac{CB^2}{CA^2}$.

উদাঃ ২। যদি LSL' উপবৃত্তের নাভিলম্ব হয়,

প্রমাণ কর যে, $LS \cdot CA = CB^2$. [কঃ বিঃ 1930.]

$$SL \cdot CA = e \cdot SX \cdot CA = e(CX - CS) \cdot CA = (CX - CS)CS$$

$$= CX \cdot CS - CS^2 = CA^2 - CS^2 = CB^2.$$

টীকা ঃ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{2\,CB^2}{CA}$.

প্রশ্নমালা

১। প্রমাণ কর ঃ (ক) $CB^2 = CS \cdot SX$; (খ) $AA'^2 = BB'^2 + SS'^2$

২। যদি AA' এবং SS' ব্যাস লইয়া দুইটি বৃত্ত আঁকা হয়, তবে ভিতরকার বৃত্তের স্পর্শকের যে অংশ বাহিরের বৃত্তের মধ্যে থাকিবে তাহা দৈর্ঘ্যে উপবৃত্তের উপাক্ষের সমান।

৩। একটি বৃত্ত B বিন্দুর মধ্য দিয়া যায় এবং পরাক্ষকে S বিন্দুতে স্পর্শ করে ; যদি SK এই বৃত্তের ব্যাস হয়, প্রমাণ কর যে, $SK \cdot BC = CA^2$.

৪। যদি উপাক্ষকে ব্যাস ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্তের জ্যা PQ, পরাক্ষকে ব্যাস ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে P' এবং Q' বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $QQ' \cdot QP' = PP' \cdot PQ' = CS^2$.

৫। উপবৃত্তের পরাক্ষকে ব্যাস ধরিয়া একটি বৃত্ত আঁকা হইয়াছে। উপবৃত্তের নাভির মধ্য দিয়া পরাক্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব বৃত্তের একটি জ্যা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে জ্যাটি দৈর্ঘ্যে উপবৃত্তের উপাক্ষের সমান।

৬। উপবৃত্তের অর্দ্ধ-পরাক্ষকে ব্যাস ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্ত উপাক্ষকে ব্যাস ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; প্রমাণ কর যে $AQ = CS$.

৭। উপবৃত্তের পরাক্ষ এবং উপাক্ষের দৈর্ঘ্য এবং অবস্থান দেওয়া আছে ; বক্র অঙ্কন কর।

৮। উপবৃত্তের পরাক্ষ এবং উপাক্ষের দৈর্ঘ্য, নাভি এবং উপবৃত্তস্থ একটি বিন্দু দেওয়া আছে ; কেন্দ্র নির্ণয় কর।

৯। যদি SBS' সমকোণ হয়, উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

১০। নিয়ামক হইতে নাভির দূরত্ব $= 3$ ইঞ্চ এবং উৎকেন্দ্রতা $= \frac{1}{2}$; অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য এবং প্রান্ত নির্ণয় কর।

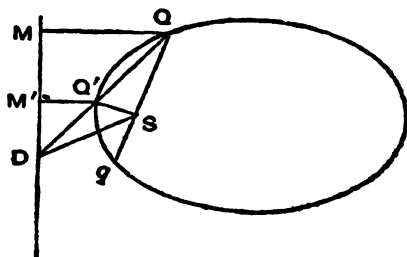
১১। নিয়ামক হইতে নাভির দূরত্ব $= 16$ ইঞ্চ এবং উৎকেন্দ্রতা $= \frac{3}{5}$; অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1943.]

উপপাদ্য—৬

উপবৃত্তের কোন জ্যা QQ′ নিয়ামকে D বিন্দুতে ছেদ করিলে, SQ এবং SQ′এর বহিঃ কোণকে SD দ্বিখণ্ডিত করে।

(If any chord QQ′ of an ellipse intersects the directrix in D, SD bisects the exterior angle between SQ and SQ′.)

মনে কর QQ′ উপবৃত্তের যে কোন একটি জ্যা যাহা বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে D বিন্দুতে ছেদ করে। SQ, SQ′ এবং SD যোগ কর এবং QSকে q পর্যন্ত বর্দ্ধিত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, DS বহিঃ কোণ Q′Sqকে দ্বিখণ্ডিত করে।

Q এবং Q′ হইতে নিয়ামকের উপর QM এবং Q′M′ লম্ব টান।

এখন Q এবং Q′ উপরবৃত্তের উপর অবস্থিত,

সুতরাং $SQ = e \cdot QM$ এবং $SQ' = e \cdot Q'M'$.

অতএব $\frac{SQ}{SQ'} = \frac{QM}{Q'M'}$.

পুনরায় DMQ এবং DM′Q′ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,

সুতরাং $\frac{QD}{Q'D} = \frac{QM}{Q'M'}$.

$\therefore \frac{SQ}{SQ'} = \frac{QD}{Q'D}$.

অর্থাৎ QSQ′ ত্রিভুজে ভূমি QQ′ এমনভাবে D বিন্দুতে বহির্বিভক্ত হইয়াছে যে, দুইটি অংশ QD এবং Q′Dএর অনুপাত দুইটি বাহু SQ এবং SQ′এর অনুপাতের সমান।

অতএব SD বহিঃ কোণ Q′Sqকে দ্বিখণ্ডিত করে।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। প্রমাণ কর যে কোন সরল রেখা উপবৃত্তকে দুইটির অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না। [কঃ বিঃ 1938.]

যদি সম্ভব হয়, মনে কর সরল রেখা PQ উপবৃত্তকে পুনরায় R বিন্দুতে ছেদ করিল।

মনে কর RQP বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে D বিন্দুতে ছেদ করে। SD, SP এবং SR যোগ কর এবং QS ও RSকে যথাক্রমে q এবং r পর্যন্ত বর্দ্ধিত কর। তাহা হইলে DS, PSQ ত্রিভুজের বহিঃ কোণ PSqকে এবং PSR ত্রিভুজের বহিঃ কোণ PSrকে দ্বিখণ্ডিত করে।

অর্থাৎ $\angle PSD = \angle DSq$ এবং $\angle PSD = \angle DSr$.

সুতরাং $\angle DSq = \angle DSr$;

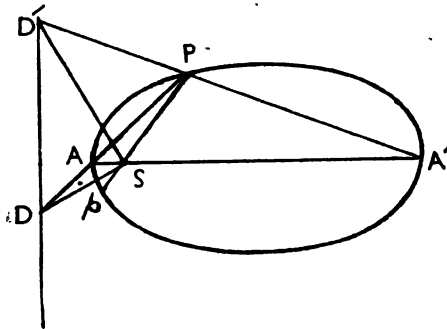
কিন্তু ইহা অসম্ভব ; কারণ অংশ কখনও পূর্ণের সমান হইতে পারে না।

অতএব কোন সরল রেখা উপবৃত্তকে দুইটির অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

উদাঃ ২। উপবৃত্তস্থ কোন বিন্দুকে শীর্ষ দুইটির সহিত যোগ করিয়া বর্দ্ধিত করিলে একটি নিয়ামককে D এবং D′ বিন্দুতে ছেদ করে ; প্রমাণ কর DD′ সেই নিয়ামকের নাভিতে এক সমকোণের সম্মুখীন। [কঃ বিঃ 1940.]

মনে কর A, A′ উপবৃত্তের শীর্ষদ্বয় এবং P উপবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু ; বর্দ্ধিত PA এবং A′P একটি নিয়ামককে যথাক্রমে D এবং D′ বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে কর S সেই নিয়ামকের নাভি।

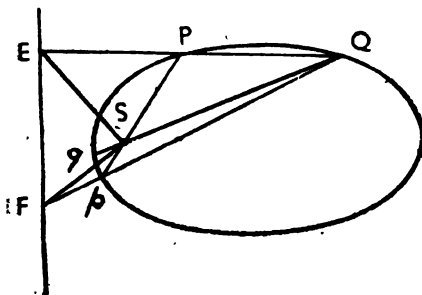
প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle DSD'$ এক সমকোণের সমান।

PSকে যোগ করিয়া p পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর।

PA একটি জ্যা এবং বর্দ্ধিত করিলে ইহা নিয়ামককে D বিন্দুতে ছেদ করে, সুতরাং DS বহিঃকোণ ASpকে দ্বিখণ্ডিত করে।

পুনরায় A'P একটি জ্যা এবং বর্দ্ধিত করিলে ইহা নিয়ামককে D' বিন্দুতে ছেদ করে, সুতরাং D'S বহিঃকোণ ASPকে দ্বিখণ্ডিত করে। কিন্তু PSp একটি সরলরেখা।

অতএব $\angle DSD'$ এক সমকোণের সমান।

উদাঃ ৩। উপবৃত্তের যে কোন নাভিগ জ্যার প্রান্ত দুইটি এবং উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু যোগ করিয়া বর্দ্ধিত করিলে একটি নিয়ামকের যে অংশ ছেদ করে, তাহা সেই নিয়ামকের নাভিতে এক সমকোণের সম্মুখীন। [কঃ বিঃ 1942.]

মনে কর PSp উপবৃত্তের একটি নাভিগ জ্যা এবং Q উপবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। QP এবং Qp যোগ করিয়া বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে E এবং F বিন্দুতে ছেদ করে। ES এবং FS যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle ESF$ এক সমকোণের সমান।

QS যোগ করিয়া q পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর।

QP একটি জ্যা, ইহাকে বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে E বিন্দুতে ছেদ করে, সুতরাং ES ত্রিভুজ PSQএর বহিঃকোণ PSqকে দ্বিখণ্ডিত করে।

পুনরায় Qp একটি জ্যা, ইহাকে বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে F বিন্দুতে ছেদ করে, সুতরাং FS ত্রিভুজ pSQএর বহিঃকোণ pSqকে দ্বিখণ্ডিত করে।

কিন্তু PSp একটি সরলরেখা ; অতএব $\angle ESF$ এক সমকোণের সমান।

প্রশ্নমালা

১। উৎকেন্দ্রতা একটি নাভি এবং উপবৃত্তের উপর দুইটি বিন্দু দেওয়া আছে ; বক্র অঙ্কন কর।

২। একটি নাভি এবং উপবৃত্তের উপর তিনটি বিন্দু দেওয়া আছে ; বক্র অঙ্কন কর।

৩। যদি PSP′ উপবৃত্তের একটি নাভিগ জ্যা হয়, প্রমাণ কর যে PX এবং P′X পরাক্ষের উপর সমভাবে নত।

৪। PSP′ উপবৃত্তের একটি নাভিগ জ্যা, এবং Q বক্রস্থ যে-কোন বিন্দু ; QP এবং QP′কে বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে E এবং F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $EX \cdot FX = SX^2$.

৫। উপবৃত্তস্থ কোন বিন্দুকে শীর্ষ দুইটির সহিত যোগ করিয়া বর্দ্ধিত করিলে একটি নিয়ামককে D এবং D′ বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর $DX \cdot D'X = SX^2$.

৬। PSP′ এবং QSQ′ উপবৃত্তের দুইটি নাভিগ জ্যা ; প্রমাণ কর যে, $PP' : QQ' = PS \cdot SP' : QS \cdot SQ'$.

৭। উপবৃত্তের একটি জ্যা QQ′এর দুইটি প্রান্ত বক্রস্থিত যে কোন বিন্দু Pএর সহিত যোগ করা হইয়াছে ; PQ এবং PQ′কে বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে D এবং D′ বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, DSD′ একটি ধ্রুব কোণ।

[কঃ বিঃ 1948.]

উপপাদ্য—৭

উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দুর কোটির বর্গ এবং কোটির পাদদেশ দ্বারা বিভক্ত অক্ষের দুই অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র সরল ভেদে থাকে।

(The square of the ordinate of any point on an ellipse varies as the rectangle contained by the segments of the axis made by the ordinate.)

মনে কর P উপবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু এবং তাহার কোটি PN অক্ষকে AN এবং A′N দুই অংশে ছেদ করে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\frac{PN^2}{AN \cdot A'N}$ ধ্রুব।

PS যোগ করিয়া p পর্য্যন্ত বৰ্দ্ধিত কর।

PA এবং A′P যোগ কর এবং মনে কর বৰ্দ্ধিত করিলে তাহারা নিয়ামককে D এবং D′ বিন্দুতে ছেদ করে। DS এবং D′S যোগ কর।

এখন PAN এবং DAX সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ; সুতরাং $\frac{PN}{AN} = \frac{DX}{AX}$.

পুনরায়, PA′N এবং D′A′X সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ;

সুতরাং $\frac{PN}{A'N} = \frac{D'X}{A'X}$.

অতএব, $$\frac{PN^2}{AN \cdot A'N} = \frac{DX \cdot D'X}{AX \cdot A'X}.$$

PA জ্যাকে বৰ্দ্ধিত করিলে উহা নিয়ামককে D বিন্দুতে ছেদ করে; সুতরাং DS ত্রিভুজ ASPএর বহিঃকোণ ASpকে দ্বিখণ্ডিত করে।

পুনরায় $A'P$ জ্যাকে বর্দ্ধিত করিলে উহা নিয়ামককে D' বিন্দুতে ছেদ করে ; সুতরাং $D'S$ ত্রিভুজ $A'SP$এর বহিঃকোণ ASPকে দ্বিখণ্ডিত করে।

কিন্তু PSP একটি সরলরেখা ; অতএব DSD' এক সমকোণের সমান।

এখন DSD' সমকোণী ত্রিভুজে সমকোণ S হইতে অতিভুজ DD'এর উপর SX লম্ব ;

সুতরাং $DX \cdot D'X = SX^2$.

অতএব $\frac{PN^2}{AN \cdot A'N} = \frac{SX^2}{AX \cdot A'X}$.

কিন্তু A, A' S এবং X বিন্দুসমূহ নির্দ্দিষ্ট ; সুতরাং $\frac{SX^2}{AX \cdot A'X}$ ধ্রুব।

অতএব $\frac{PN^2}{AN \cdot A'N}$ ধ্রুব।

বিশেষ অবস্থায় যখন P উপাক্ষের প্রান্ত Bএর সহিত মিলিয়া যায়, তখন PNও BCএর সহিত এক হইয়া যায় এবং AN ও $A'N$ তখন AC ও $A'C$ হইয়া দাঁড়ায়।

অতএব সেক্ষেত্রে $\frac{PN^2}{AN \cdot A'N} = \frac{BC^2}{AC \cdot A'C} = \frac{CB^2}{CA^2}$.

বিকল্প প্রমাণ :

P হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব PM টান।

$$SP = e \cdot PM = e \cdot XN = e(AX + AN) = SA + e \cdot AN$$
$$= AN - SN + e \cdot AN = (1+e)AN - SN.$$

$\therefore\ SP + SN = (1+e)AN.$

পুনরায়, $SP = e \cdot PM = e \cdot XN = e(A'X - A'N) = SA' - e \cdot A'N$
$$= A'N + SN - e \cdot A'N = (1-e)A'N + SN.$$

$\therefore\ SP - SN = (1-e)A'N.$

সুতরাং গুণ করিলে, $SP^2 - SN^2 = (1-e^2)AN \cdot A'N.$

কিন্তু $SP^2 - SN^2 = PN^2$;

অতএব $\frac{PN^2}{AN \cdot A'N} = 1 - e^2$; ইহা প্রদত্ত উপবৃত্তের জন্য ধ্রুব।

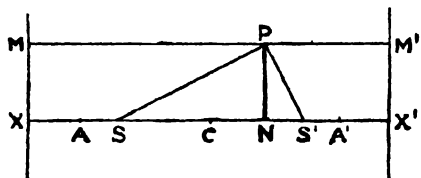
পুনরায় যেহেতু $\frac{CB^2}{CA^2} = 1 - e^2$;

অতএব $\frac{PN^2}{AN \cdot A'N} = \frac{CB^2}{CA^2}$.

বিপরীত উপপাদ্য

একটি সমতলের উপর একটি বিন্দু যদি এমন ভাবে নড়িয়া বেড়ায় যে সমতলস্থ যে কোন একটি নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরল রেখার উপর ঐ বিন্দুর বিভিন্ন অবস্থান হইতে লম্বের এবং ঐ সকল লম্ব দ্বারা বিভক্ত নির্দ্দিষ্ট রেখার দুই অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের অনুপাত ধ্রুব এবং একক অপেক্ষা ছোট হয় তবে বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত হইবে, যাহার পরাক্ষ হইবে নির্দ্দিষ্ট সরলরেখা এবং শীর্ষদ্বয় হইবে রেখাটির প্রান্তদ্বয়।

মনে কর AA′ নির্দ্দিষ্ট সরলরেখা এবং P সমতলের উপর চলমান বিন্দু।

P হইতে AA′এর উপর PN লম্ব টান। P এমনভাবে নড়িয়া বেড়ায় যে $\frac{PN^2}{AN \cdot A'N}$ ধ্রুব এবং একক অপেক্ষা ছোট।

প্রমাণ করিতে হইবে যে P বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত, যাহার অক্ষ AA′ এবং শীর্ষদ্বয় A এবং A′.

মনে কর $\frac{PN^2}{AN \cdot A'N} = 1 - e^2$, যেখানে e একক অপেক্ষা ছোট একটি ধ্রুব রাশি।

AA′কে C বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর এবং CAএর উপর S এবং CA বর্দ্ধিতের উপর X বিন্দু লও, যাহাতে $CS = e \cdot CA$ এবং $CA = e \cdot CX$.

Xএর মধ্য দিয়া AA′এর উপর লম্ব MX সরলরেখা টান। SP এবং S′P যোগ কর।

এখন $AN \cdot A'N = (CA + CN)(CA' - CN) = CA^2 - CN^2$,

কারণ $CA = CA'$.

$\therefore \quad PN^2 = (1 - e^2)(CA^2 - CN^2)$.

পুনরায়, $SN^2 = (CS + CN)^2 = (e \cdot CA + CN)^2$.

$$\therefore \quad SP^2 = PN^2 + SN^2 = (1 - e^2)(CA^2 - CN^2) + (e \cdot CA + CN)^2$$
$$= (CA + e \cdot CN)^2.$$

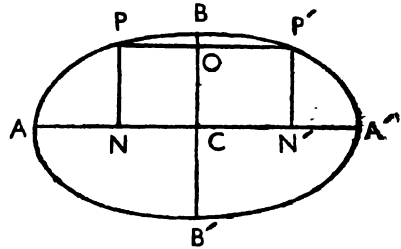
সুতরাং $\quad SP = CA + e \cdot CN = e(CX + CN) = e \cdot XN = e \cdot PM$.

অতএব P বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত, যাহাতে অক্ষ AA' এবং শীর্ষদ্বয় A এবং A'.

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। উপবৃত্ত উপাক্ষের উভর পার্শ্বে প্রতিসম। [উপপাদ্য (২)এর বিকল্প প্রমাণ।]

মনে কর উপবৃত্তের পরাক্ষ AA' উপাক্ষ BB' এবং কেন্দ্র C.

মনে কর PP', উপাক্ষের উপর লম্ব একটি জ্যা BCB'কে O বিন্দুতে ছেদ করে। PN এবং P'N', যথাক্রমে P এবং P' বিন্দুর কোটি।

এখন $\dfrac{PN^2}{AN \cdot A'N} = \dfrac{CB^2}{CA^2}$, এবং $\dfrac{P'N'^2}{AN' \cdot A'N'} = \dfrac{CB^2}{CA^2}$.

সুতরাং $\dfrac{PN^2}{AN \cdot A'N} = \dfrac{PN'^2}{AN' \cdot A'N'}$.

কিন্তু $AN \cdot A'N = (CA - CN)(CA' + CN) = CA^2 - CN^2$,

কারণ $CA = CA'$.

অনুরূপভাবে $AN' \cdot A'N' = (CA + CN')(CA' - CN')$

$= CA^2 - CN'^2$, কারণ $CA = CA'$.

$$\frac{PN^2}{CA^2 - CN^2} = \frac{P'N'^2}{CA^2 - CN'^2}.$$

কিন্তু $PN = P'N'$, কারণ $PN\,N'P'$ একটি আয়তক্ষেত্র ;

সুতরাং $CN = CN'$.

কিন্তু $CN = PO$ এবং $CN' = P'O$; সুতরাং $PO = P'O$.

অর্থাৎ BCB' দ্বারা PP', O বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত।

কিন্তু PP' উপাক্ষ BCB'এর উপর লম্ব যে কোন একটি জ্যা। সুতরাং উপাক্ষের উপর লম্ব প্রত্যেক জ্যাকেই BCB' দ্বিখণ্ডিত করে।

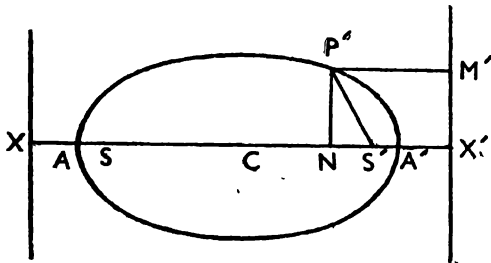
অতএব উপবৃত্ত উপাক্ষের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

উদাঃ ২। উপবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি এবং দ্বিতীয় নিয়ামক আছে।

CAএর উপর $CS' = CS = e \cdot CA$ এবং CA'কে বর্দ্ধিত করিয়া

$CX' = CX = \dfrac{CA}{e}$ কাটিয়া লও।

X'এর মধ্য দিয়া AA'এর উপর লম্ব $M'X'$ টান।

উপবৃত্তের উপর P' যে কোন বিন্দু লও এবং $P'M'$ এবং $P'N$ যথাক্রমে নিয়ামকের ও পরাক্ষের উপর লম্ব টান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $S'P' = e \cdot P'M'$.

$S'P'^2 = P'N^2 + S'N^2$.

কিন্তু $P'N^2 = (1-e^2)AN \cdot A'N$

$$=(1-e^2)(CA+CN)(CA'-CN)$$

$$=(1-e^2)(CA'^2-CN^2), \text{ কারণ } CA=CA'.$$

আবার $S'N^2=(CS'-CN)^2=(e \cdot CA'-CN)^2$.

সুতরাং $S'P'^2=(1-e^2)(CA'^2-CN^2)+(e \cdot CA'-CN)^2$

$=(CA'-e \cdot CN)^2$.

অর্থাৎ $S'P'=CA'-e \cdot CN=e(CX'-CN)=e \cdot X'N=e \cdot P'M'$.

কিন্তু P' উপবৃত্তের উপর অবস্থিত এবং একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু S' হইতে তাহার দূরত্বের সহিত একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা $M'X'$ হইতে দূরত্বের অনুপাত e ;

সুতরাং S'কে নাভি এবং $M'X'$কে নিয়ামক ধরিলে P'এর সঞ্চারপথ এবং পূর্ব্বেকার নাভি S এবং নিয়ামক MX ধরিয়া সঞ্চারপথ একই।

অতএব উপবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি এবং দ্বিতীয় নিয়ামক আছে।

উদাঃ ৩। প্রমাণ কর যে PNএর বৃহত্তম মান CB. [কঃ বিঃ 1931.]

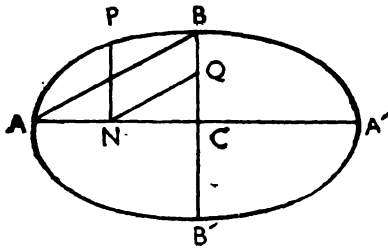
$\frac{PN^2}{AN \cdot A'N}=\frac{CB^2}{CA^2}$; কিন্তু $AN \cdot A'N=CA^2-CN^2$;

সুতরাং $\frac{PN^2}{CA^2-CN^2}=\frac{CB^2}{CA^2}$; অর্থাৎ $PN^2=\frac{CB^2}{CA^2}(CA^2-CN^2)$.

PN^2 বৃহত্তম হইবে, যখন $CN=0$ হইবে।

অতএব PNএর বৃহত্তম মান CB.

উদাঃ ৪। যদি AA' এবং BB' যথাক্রমে একটি উপবৃত্তের পরাক্ষ এবং উপাক্ষ হয়, এবং উপবৃত্তস্থ P বিন্দুর কোটি PN হয় এবং N বিন্দু হইতে ABএর সমান্তরাল NQ উপাক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, $PN^2=BQ \cdot B'Q$. [কঃ বিঃ 1941.]

NCQ এবং ACB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ ;

সুতরাং $\dfrac{CQ}{CN}=\dfrac{CB}{CA}$,

অর্থাৎ $\dfrac{CQ^2}{CB^2}=\dfrac{CN^2}{CA^2}$

অথবা $\dfrac{CB^2-CQ^2}{CB^2}=\dfrac{CA^2-CN^2}{CA^2}$

অথবা $CB^2-CQ^2=\dfrac{CB^2}{CA^2}(CA^2-CN^2)$.

কিন্তু $PN^2=\dfrac{CB^2}{CA^2}(CA^2-CN^2)$

অতএব $PN^2=CB^2-CQ^2=(CB-CQ)(CB+CQ)$

$$=(CB-CQ)(CB'+CQ)=BQ{\cdot}B'Q.$$

প্রশ্নমালা

১। প্রমাণ কর যে $\dfrac{CN^2}{CA^2}+\dfrac{PN^2}{CB^2}=1$.

২। PM যদি উপবৃত্তস্থ P বিন্দু হইতে উপাক্ষের উপর লম্ব হয়,

প্রমাণ কর যে $\dfrac{PM^2}{BM{\cdot}B'M}=\dfrac{CA^2}{CB^2}$.

৩। প্রমাণ কর যে উপবৃত্তের নাভিলম্ব $=\dfrac{2\,CB^2}{CA}$.

৪। উপবৃত্তের কেন্দ্রগামী প্রত্যেক জ্যা কেন্দ্রে দ্বিখণ্ডিত হয়।

৫। প্রমাণ কর $CP^2=CB^2+e^2{\cdot}CN^2$.

৬। উপবৃত্তের পরাক্ষকে ব্যাস ধরিয়া বৃত্ত আঁকিলে তাহা সম্পূর্ণরূপে বক্রের বাহিরে থাকে এবং উপাক্ষকে ব্যাস ধরিয়া বৃত্ত আঁকিলে তাহা সম্পূর্ণরূপে বক্রের ভিতরে থাকে।

৭। যদি বৃত্তের প্রত্যেক বিন্দুর কোটিকে যে কোন নির্দ্দিষ্ট অনুপাতে অন্তঃ অথবা বহির্বিভক্ত করা হয়, তবে ছেদ বিন্দুর সঞ্চারপথ উপবৃত্ত হইবে।

৮। উপবৃত্তের পরাক্ষকে ব্যাস ধরিয়া বৃত্ত আঁকা হইয়াছে এবং বৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু Q হইতে পরাক্ষ অর্থাৎ ব্যাসের উপর QN লম্ব টানা হইয়াছে; যদি উহা উপবৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, $\frac{PN}{QN}=\frac{CB}{CA}$.

৯। উপবৃত্তের উপাক্ষকে ব্যাস ধরিয়া বৃত্ত আঁকা হইয়াছে এবং উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু P হইতে উপাক্ষ অর্থাৎ ব্যাসের উপর এমন PN লম্ব টানা হইয়াছে, যাহা বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\frac{PN}{QN}=\frac{CA}{CB}$.

১০। প্রমাণ কর যে উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দুতে পরাক্ষ স্থূল কোণের এবং উপাক্ষ সূক্ষ্ম কোণের সম্মুখীন।

১১। SL যদি উপবৃত্তের অৰ্দ্ধ-নাভিলম্ব হয়, প্রমাণ কর যে, $SL \cdot CA = CB^2$.

১২। বৃত্তস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি নির্দ্দিষ্ট ব্যাসের উপর লম্ব টানা হইয়াছে; লম্বের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১৩। উপবৃত্তের উপর P একটি বিন্দু; A এবং A′এ যথাক্রমে AP এবং A′Pএর উপর লম্ব টানিলে উহারা পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে Qএর সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত এবং AA′ উহার উপাক্ষ।

১৪। যদি AP এবং A′P উপাক্ষকে Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, $CR \cdot CQ = CB^2$.

উপপাদ্য—৮

উপবৃত্তের যে কোন সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর মধ্য বিন্দুর সঞ্চার-পথ কেন্দ্রগামী একটি সরল রেখা।

(The locus of the middle points of any system of parallel chords of an ellipse is a straight line passing through the centre.)

মনে কর QQ′ উপবৃত্তের যে কোন একটি সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর একটি জ্যা এবং V ইহার মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে V এর সঞ্চারপথ একটি সরল রেখা এবং উহা উপবৃত্তের কেন্দ্র C এর মধ্য দিয়া যায়।

মনে কর QQ′কে বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে D বিন্দুতে ছেদ করে। নাভি S হইতে QQ′এর উপর SY লম্ব টান এবং মনে কর বর্দ্ধিত করিলে উহা নিয়ামককে K বিন্দুতে ছেদ করে। KV, SQ এবং SQ′ যোগ কর এবং নিয়ামকের উপর QM এবং Q′M′ লম্ব আঁক।

Q এবং Q′ উপবৃত্তের উপর অবস্থিত; সুতরাং $SQ = e.QM$ এবং $QS' = eQ'M'$.

অতএব, $\dfrac{SQ}{SQ'} = \dfrac{QM}{Q'M'}$.

আবার QMD এবং Q′M′D সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ;

সুতরাং $\dfrac{QM}{Q'M'} = \dfrac{QD}{Q'D}$.

অতএব $\dfrac{SQ}{SQ'} = \dfrac{QD}{Q'D}$; অর্থাৎ $\dfrac{SQ}{QD} = \dfrac{SQ'}{Q'D}$.

$$\therefore \quad \frac{SQ^2}{QD^2} = \frac{SQ'^2}{Q'D^2} = \frac{SQ^2 - SQ'^2}{QD^2 - Q'D^2}.$$

কিন্তু $SQ^2 - SQ'^2 = (SY^2 + QY^2) - (SY^2 + Q'Y^2) = QY^2 - Q'Y^2$

$$= (QY - Q'Y)(QY + Q'Y) = 2YV \cdot QQ'$$

এবং $QD^2 - Q'D^2 = (QD + Q'D)(QD - Q'D) = 2DV \cdot QQ'$,

কারণ $QV = Q'V$.

অতএব $\dfrac{SQ^2}{QD^2} = \dfrac{2YV \cdot QQ'}{2DV \cdot QQ'} = \dfrac{YV}{DV}$.

এখন অনুপাত $\dfrac{SQ}{SM}$ ধ্রুব এবং eএর সমান; এবং একই গোষ্ঠীর সকল সমান্তরাল জ্যার জন্য QM এবং QDএর মধ্যস্থিত কোণ একই থাকে,

সুতরাং অনুপাত $\dfrac{QM}{QD}$ ও ধ্রুব।

অতএব $\dfrac{SQ}{QM} \cdot \dfrac{QM}{QD}$ অর্থাৎ $\dfrac{SQ}{QD}$ ও একটি ধ্রুব অনুপাত।

তাহা হইলে $\dfrac{YV}{DV}$ ও একটি ধ্রুব অনুপাত।

কিন্তু D সর্ব্বদা একটি নির্দ্দিষ্ট সরলরেখা নিয়ামকের উপর থাকে এবং একই গোষ্ঠীর সমান্তরাল জ্যার জন্য SY নির্দ্দিষ্ট বিন্দু S হইতে লম্ব, সুতরাং Y ও সর্ব্বদা একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর থাকে। তাহা হইলে SY এবং নিয়ামকের ছেদ বিন্দু K যে কোন প্রদত্ত গোষ্ঠীর জন্য নির্দ্দিষ্ট। পুনরায় D এবং Y নির্দ্দিষ্ট সরল রেখায় থাকে বলিয়া V ও কোন একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর থাকিবে। সুতরাং KV একটি নির্দ্দিষ্ট সরলরেখা, কারণ K একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু।

পুনরায় যেহেতু এই গোষ্ঠীর সমান্তরাল কেন্দ্রগামী জ্যাও কেন্দ্রে দ্বিখণ্ডিত হয়, সুতরাং KV কেন্দ্র Cএর মধ্য দিয়া যাইবে। কিন্তু KV এই সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর মধ্য বিন্দুর সঞ্চারপথ।

অতএব উপবৃত্তের যে কোন সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর মধ্য বিন্দুর সঞ্চারপথ কেন্দ্রগামী একটি সরল রেখা।

সংজ্ঞা ঃ উপবৃত্তের যে কোন সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর মধ্য বিন্দুর সঞ্চার-পথকে সেই গোষ্ঠির **ব্যাস** (diameter) বলা হয়। ইহা কেন্দ্রগামী একটি সরল রেখা।

যে কোন কেন্দ্রগামী সরল রেখা কোন না কোন সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর ব্যাস হইবেই। প্রত্যেক সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর একটি জ্যা কেন্দ্রের মধ্য দিয়া যায়।

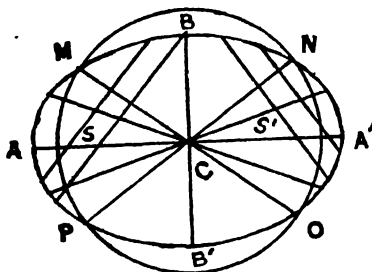
যদি উপবৃত্তের দুইটি এমন সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠী থাকে যে, একটি গোষ্ঠীর কেন্দ্রগামী জ্যা অন্য গোষ্ঠীর ব্যাস তবে দুই গোষ্ঠীর ব্যাস দুইটিকে পরস্পরের **প্রতিযোগী** (conjugate) বলে।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। একটি উপবৃত্ত অঙ্কিত আছে ; কেন্দ্র ও নাভিদ্বয় নির্ণয় কর।

[কঃ বিঃ 1933, '35.]

(ক) কেন্দ্র নির্ণয় ঃ

উপবৃত্তের যে কোন দুই জোড়া সমান্তরাল জ্যা লও। প্রথম জোড়ার মধ্য বিন্দুদ্বয় যোগ করিলে সেই গোষ্ঠীর ব্যাস পাওয়া যাইবে। তেমনি দ্বিতীয় জোড়ার মধ্য বিন্দুদ্বয় যোগ করিলে দ্বিতীয় গোষ্ঠীর ব্যাস পাওয়া যাইবে। এই দুইটি ব্যাসের ছেদ বিন্দু C, উপবৃত্তের কেন্দ্র।

(খ) নাভিদ্বয় নির্ণয় ঃ

Cকে কেন্দ্র ধরিয়া যে কোন সুবিধামত ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক যাহা উপবৃত্তকে চারিটি বিন্দু P, O, N, Mএ ছেদ করে।

PN এবং MO যোগ কর। তাহারা পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে কর PCO এবং OCN কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক উপবৃত্তকে যথাক্রমে A,A′ এবং B,B′এ ছেদ করে।

তবে AA′ উপবৃত্তের পরাক্ষ এবং BB′ উপাক্ষ।

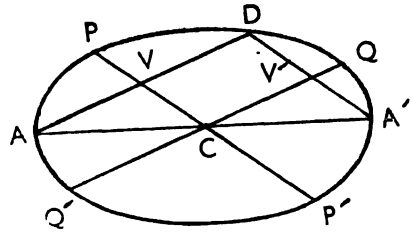
Bকে কেন্দ্র ধরিয়া CAএর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া বৃত্তচাপ আঁক, যাহা পরাক্ষকে S এবং S′ বিন্দুতে ছেদ করে।

তবে S এবং S′ উপবৃত্তের দুইটি নাভি।

(প্রমাণ কর।)

উদাঃ ২। যদি উপবৃত্তের একটি ব্যাস অন্য একটি ব্যাসের সমান্তরাল জ্যাসমূহকে দ্বিখণ্ডিত করে, তবে দ্বিতীয় ব্যাস প্রথমটির সমান্তরাল জ্যাসমূহকে দ্বিখণ্ডিত করিবে। [কঃ বিঃ 1947.]

মনে কর PCP′ এবং QCQ′ উপবৃত্তের এমন দুইটি ব্যাস যে QCQ′এর সমান্তরাল জ্যাসমূহকে PCP′ দ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে PCP′এর সমান্তরাল জ্যাসমূহকে QCQ′ দ্বিখণ্ডিত করিবে।

A বিন্দুর মধ্য দিয়া QCQ′-এর সমান্তরাল একটি জ্যা AD আঁক, যাহা PCP′কে V বিন্দুতে ছেদ করে।

তবে V, AD জ্যার মধ্যবিন্দু।

A′D যোগ কর এবং মনে কর ইহা QCQ′কে V′ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন যেহেতু C এবং V যথাক্রমে AA′ এবং ADএর মধ্যবিন্দু, সুতরাং CV এবং A′D সমান্তরাল;

অর্থাৎ PCP′ এবং A′D সমান্তরাল।

পুনরায় AA'এর মধ্যবিন্দু C এবং CV' ও AD সমান্তরাল, সুতরাং A'Dএর মধ্যবিন্দু V'.

অতএব PCP'এর সমান্তরাল জ্যাসমূহকে QCQ' দ্বিখণ্ডিত করে।

প্রশ্নমালা

১। উপবৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে দ্বিখণ্ডিত করে; প্রমাণ কর যে তাহাদের ছেদবিন্দু উপবৃত্তের কেন্দ্র।

২। PCQ উপবৃত্তের একটি ব্যাস এবং R বক্রের উপর যে কোন একটি বিন্দু; প্রমাণ কর যে PRএর সমান্তরাল জ্যাসমূহের দ্বিখণ্ডক ব্যাস, QRএর সমান্তরাল।

৩। উপবৃত্তের কেন্দ্রগামী যে কোন সরল রেখা কোন না কোন সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর ব্যাস হইবেই।

৪। উপবৃত্তের একটি ব্যাস দেওয়া আছে; এমন একটি সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠী নির্ণয় কর যাহা ইহার দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয়।

৫। প্রমাণ কর যে উপবৃত্তের কোন সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীর ব্যাস এবং নাভি হইতে এই গোষ্ঠীর উপর লম্ব পরস্পরকে নিয়ামকের উপর ছেদ করে।

৬। একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া উপবৃত্তের এমন একটি জ্যা আঁক, যাহা বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয়।

৭। উপবৃত্তের পরাক্ষ ও উপাক্ষ পরস্পরের প্রতিযোগী ব্যাস।

৮। উপবৃত্তের দুইটি ব্যাস পরস্পরের উপর লম্ব হইলে, প্রমাণ কর যে তাহাদের বর্গের বিপরীতের যোগফল ধ্রুব।

৯। প্রমাণ কর যে উপবৃত্তের নাভি, দুইটি প্রতিযোগী ব্যাস এবং নিয়ামকের দ্বারা পরিবেষ্টিত ত্রিভুজের লম্ব বিন্দু।

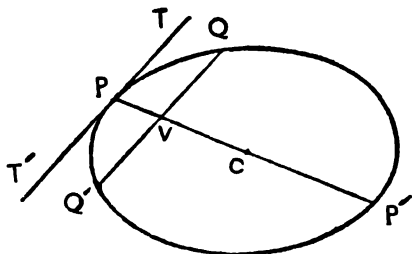
উপপাদ্য—৯

যে কোন ব্যাসের উভয় প্রান্তে অঙ্কিত উপবৃত্তের স্পর্শক সেই ব্যাস দ্বারা দ্বিখণ্ডিত জ্যা গোষ্ঠীর সমান্তরাল।

(The tangent to an ellipse at either end of a diameter is parallel to the system of chords bisected by the diameter.)

মনে কর PCP′ উপবৃত্তের একটি ব্যাস যাহা QQ′এর সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীকে দ্বিখণ্ডিত করে।

মনে কর P,P′ ব্যাসের দুই প্রান্ত এবং V,QQ′এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, P অথবা P′এ অঙ্কিত উপবৃত্তের স্পর্শক QQ′এর সমান্তরাল।

মনে কর QQ′ নিজের সমান্তরাল থাকিয়া Pএর দিকে সরিতে থাকে; তবে প্রত্যেক অবস্থাতেই QQ′এর মধ্যবিন্দু PCP′এর উপরই থাকিবে, অর্থাৎ QV এবং Q′V সমান থাকিবে।

এখন QQ′ যতই Pএর দিকে অগ্রসর হইবে, Q এবং Q′ ততই পরস্পরের নিকটবর্ত্তী হইতে থাকিবে;

সেই সঙ্গে QV এবং Q′V ও কমিতে থাকিবে কিন্তু সর্ব্বদাই পরস্পরের সমান থাকিবে।

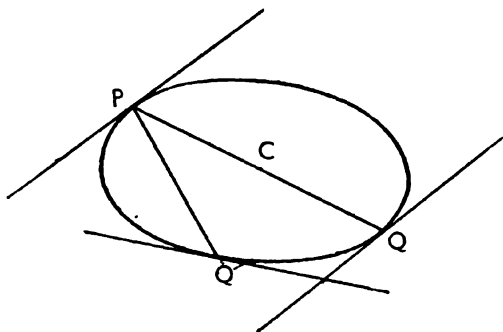
চরম অবস্থায় Q এবং Q′ একই সঙ্গে Pতে যাইয়া মিলিত হইবে এবং জ্যা QQ′ স্পর্শক TPT′এ পরিণত হইবে, কিন্তু জ্যা গোষ্ঠীর সমান্তরাল থাকিবে।

অতএব P বিন্দুতে অঙ্কিত উপবৃত্তের স্পর্শক QQ′এর সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, P′ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকও QQ′এর সমান্তরাল।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। উপবৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শকের স্পর্শ বিন্দুর সংযোজক একটি ব্যাস। [কঃ বিঃ 1931.]

মনে কর উপবৃত্তের দুইটি বিন্দু P এবং Qতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PQ উপবৃত্তের ব্যাস।

যদি PQ ব্যাস না হয়, তবে মনে কর PQ' ব্যাস।

তাহা হইলে যেহেতু P এবং Q' ব্যাসের দুই প্রান্ত : সুতরাং এই দুইটি বিন্দুতে অঙ্কিত উপবৃত্তের দুইটি স্পর্শক সমান্তরাল।

কিন্তু দেওয়া আছে P এবং Q বিন্দুতে অঙ্কিত উপবৃত্তের স্পর্শক দুইটি সমান্তরাল।

সুতরাং Q এবং Q' বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি সমান্তরাল।

কিন্তু তাহা অসম্ভব, কারণ তাহারা পরস্পরকে ছেদ করে।

অতএব PQ নিশ্চয়ই উপবৃত্তের ব্যাস।

বিকল্প প্রমাণ:

P এবং Qকে উপবৃত্তের কেন্দ্র Cএর সহিত যোগ কর।

তাহা হইলে P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীকে PC দ্বিখণ্ডিত করে। সুতরাং PC একটি ব্যাস।

আবার Q বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠীকে QC দ্বিখণ্ডিত করে। সুতরাং QC একটি ব্যাস।

এখন P এবং Q বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় সমান্তরাল, সুতরাং উভয়েরই সমান্তরাল জ্যা গোষ্ঠী একই; তাহাদের ব্যাস PC এবং QC দুই-ই হইতে হইলে PCQ একটি সরল রেখা হওয়া প্রয়োজন।

অতএব PQ উপবৃত্তের ব্যাস।

উদাঃ ২। একটি প্রদত্ত সরল রেখার সমান্তরাল করিয়া উপবৃত্তের স্পর্শক আঁক।

প্রদত্ত সরল রেখার সমান্তরাল করিয়া উপবৃত্তের দুইটি জ্যা আঁক।

তাহাদের মধ্যবিন্দু যোগ করিলে এই গোষ্ঠীর ব্যাস পাওয়া যাইবে। এই ব্যাস উপবৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। ব্যাসের উভয় প্রান্তেই উপবৃত্তের স্পর্শক আঁকিলে প্রদত্ত সরল রেখার সমান্তরাল হইবে।

যেহেতু কোন সরল রেখা উপবৃত্তকে দুইটির অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না সুতরাং এইরূপ স্পর্শক দুইটির অধিক আঁকা সম্ভব নয়।

প্রশ্নমালা

১। শীর্ষদ্বয়ে অঙ্কিত উপবৃত্তের স্পর্শকদ্বয় নিয়ামকের সমান্তরাল।

২। উপবৃত্তের যে কোন দুইটি ব্যাসের প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শক সমূহ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।

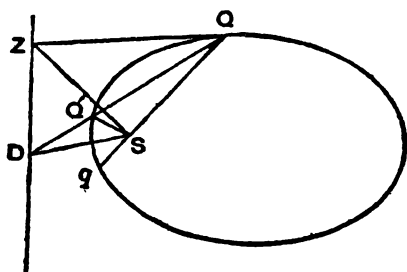
৩। উপবৃত্তের এমন একটি স্পর্শক আঁক যাহা অক্ষদ্বয়কে কেন্দ্র হইতে সমদূরে ছেদ করে।

৪। উপবৃত্তের উপর প্রদত্ত বিন্দুতে একটি স্পর্শক আঁক।

উপপাদ্য—১০

উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু এবং নিয়ামকের মধ্যে ছেদিত অংশ নাভিতে এক সমকোণের সম্মুখীন।

(The portion of the tangent at any point of an ellipse intercepted between that point and the directrix subtends a right angle at the focus.)

মনে কর উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু Qতে অঙ্কিত স্পর্শক নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করে।

Z এবং Qকে নাভি Sএর সহিত যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle QSZ$ এক সমকোণের সমান।

Qএর মধ্য দিয়া যে কোন জ্যা QQ' আঁক এবং মনে কর ইহাকে বর্দ্ধিত করিলে নিয়ামককে D বিন্দুতে ছেদ করে।

QSকে যোগ করিয়া q বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর। DS যোগ কর।

তাহা হইলে DS ত্রিভুজ QSQ'এর বহিঃকোণ $Q'Sq$কে দ্বিখণ্ডিত করে।

এইবার মনে কর Qকে স্থির রাখিয়া ছেদক $QQ'D$কে ঘোরানো হইতেছে, যাহাতে Q' ক্রমেই Qএর নিকটবর্ত্তী হয়।

সীমাস্থ অবস্থায় যখন Q এবং Q' এক হইয়া যায় তখন Dএর অবস্থান Z, এবং ছেদক $QQ'D$ স্পর্শক QZএ রূপান্তরিত হয়।

তখন $\angle Q'SD$ রূপান্তরিত হয় $\angle QSZ$এ, এবং $\angle DSq$ রূপান্তরিত হয় $\angle ZSq$এ।

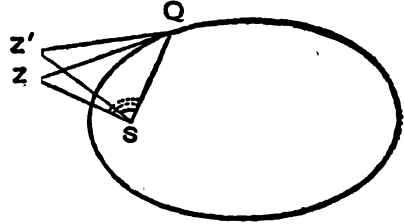
কিন্তু $\angle Q'SD$ সর্ব্বদাই $\angle DSq$এর সমান; সুতরাং $\angle QSZ$ ও এখন ZSqএর সমান।

কিন্তু QSq একটি সরল রেখা।

অতএব $\angle QSZ$ এক সমকোণের সমান।

বিপরীত উপপাদ্য

যদি উপবৃত্তস্থ কোন বিন্দু ও নিয়ামকের কোন বিন্দুর সংযোজক নাভিতে এক সমকোণের সম্মুখীন হয়, তবে উহা বক্রস্থ বিন্দুতে উপবৃত্তের স্পর্শক।

মনে কর Q উপবৃত্তের উপর এবং Z নিয়ামকের উপর বিন্দু এবং S নাভিতে QZ এক সমকোণের সম্মুখীন, অর্থাৎ $\angle QSZ$ এক সমকোণের সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে Q বিন্দুতে QZ উপবৃত্তের স্পর্শক।

যদি Q বিন্দুতে QZ উপবৃত্তের স্পর্শক না হয়, তবে সম্ভব হইলে মনে কর Q বিন্দুতে QZ' উপবৃত্তের স্পর্শক।

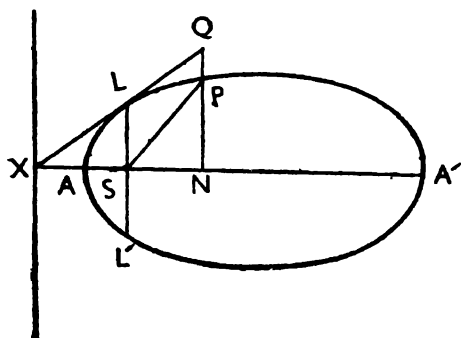
QZ' নিয়ামককে Z' বিন্দুতে ছেদ করে সুতরাং $Z'S$ এবং QS যোগ করিলে $\angle QSZ'$ এক সমকোণের সমান।

কিন্তু দেওয়া আছে $\angle QSZ$ এক সমকোণের সমান।

সুতরাং $\angle QSZ' = \angle QSZ$; কিন্তু তাহা অসম্ভব, কারণ অংশ কখনও পূর্ণের সমান হইতে পারে না।

অতএব Q বিন্দুতে QZই উপবৃত্তের স্পর্শক।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। উপবৃত্তস্থ কোন বিন্দু Pএর কোটি নাভিলম্বের প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শককে Q বিন্দুতে ছেদ করিলে PS = QN. [কঃ বিঃ 1933.]

মনে কর S নাভি এবং LSL′ উপবৃত্তের নাভিলম্ব।

L বিন্দুতে অঙ্কিত উপবৃত্তের স্পর্শক LQ, P বিন্দুর কোটি PNকে (বৰ্দ্ধিত করিলে) Q বিন্দুতে ছেদ করে। PS যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PS = QN.

LX যোগ কর।

যেহেতু ∠LSX এক সমকোণের সমান,

সুতরাং LX, L বিন্দুতে উপবৃত্তের স্পর্শক।

কিন্তু LQও, L বিন্দুতে উপবৃত্তের স্পর্শক।

সুতরাং XLQ একটি সরল রেখা।

এখন LSX এবং QNX সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ ;

সুতরাং $\frac{QN}{XN} = \frac{SL}{XS}$.

কিন্তু L উপবৃত্তের উপর একটি বিন্দু বলিয়া $SL = e \cdot XS$;

সুতরাং $QN = e \cdot XN = PS$.

উদাঃ ২। উপবৃত্তের যে কোন বিন্দু Pতে অঙ্কিত স্পর্শক নাভিলম্বকে H এবং নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $HS = e.\ SZ$, যেখানে e উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা। [কঃ বিঃ 1942.]

P হইতে নিয়ামকের উপর PM লম্ব আঁক।

PS, MS এবং ZS যোগ কর।

যেহেতু $\angle PMZ = \angle PSZ$ = এক সমকোণ;

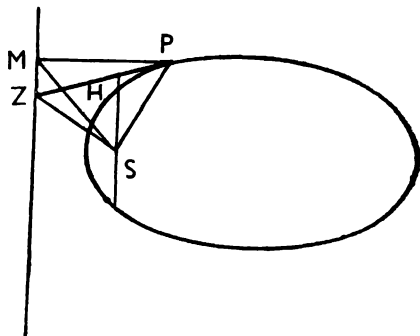
সুতরাং $\angle PMZ + \angle PSZ$ = দুই সমকোণ,

অর্থাৎ P,M,Z,S সমবৃত্ত।

সুতরাং $\angle PZS = \angle PMS$ এবং $\angle PSM = \angle PZM = \angle ZHS$.

তাহা হইলে, HZS এবং PMS ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ;

সুতরাং $\frac{HS}{SZ} = \frac{SP}{PM} = e.$

অতএব $HS = e.\ SZ$

প্রশ্নমালা

১। উপবৃত্তের উপর প্রদত্ত একটি বিন্দুতে স্পর্শক আঁক।

২। নিয়ামকের উপর প্রদত্ত একটি বিন্দু হইতে উপবৃত্তের স্পর্শক আঁক।

৩। উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি, নিয়ামক, একটি স্পর্শক ও তাহার স্পর্শবিন্দু দেওয়া আছে; নাভি নির্ণয় কর। কোন ক্ষেত্রে ইহা সম্ভব হইবে না?

৪। উপবৃত্তের নিয়ামক, তুইটি স্পর্শক ও তাহাদের স্পর্শ বিন্দু দেওয়া আছে ; নাভি নির্ণয় কর। কোন ক্ষেত্রে ইহা সম্ভব হইবে না ?

৫। উপবৃত্তের উপাক্ষের প্রান্ত B বিন্দুতে স্পর্শক আঁকিয়া প্রমাণ কর যে, $CS.CX = CA^2$.

৬। যদি উপবৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক PZ দ্বিতীয় নিয়ামককে Z′ বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে PZ′ দ্বিতীয় নাভি S′ এ এক সমকোণের সম্মুখীন।

৭। যদি উপবৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক নিয়ামক তুইটিকে Z এবং Z′ বিন্দুতে ছেদ করে এবং P বিন্দুর মধ্য দিয়া MPM′ উভয় নিয়ামকের উপর লম্ব হয়, প্রমাণ কর যে, P,M,S,Z এবং P,S′,M′,Z′ সমবৃত্ত।

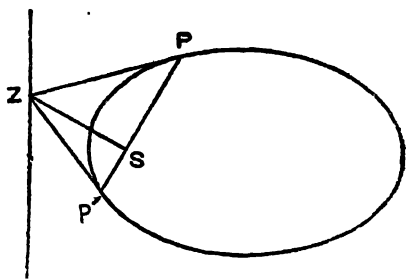
৮। যদি উপবৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর O একটি বিন্দু লওয়া যায় এবং OU ও OI যথাক্রমে SP এবং নিয়ামকের উপর লম্ব হয়, প্রমাণ কর যে, $SU = e \cdot OI$.

উপপাদ্য—১১

উপবৃত্তের যে কোন নাভিগ জ্যার প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে নিয়ামকের উপর ছেদ করে।

(*The tangent at the ends of a focal chord of an ellipse intersect on the directrix.*)

মনে কর PSP′ উপবৃত্তের একটি নাভিগ জ্যা।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, P এবং P′এ অঙ্কিত উপবৃত্তের স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে নিয়ামকের উপর ছেদ করিবে।

P বিন্দুতে উপবৃত্তের একটি স্পর্শক PZ আঁক এবং মনে কর ইহা নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করে। ZS এবং ZP′ যোগ কর।

যেহেতু PZ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু এবং নিয়ামকের মধ্যে ছেদিত অংশ, সুতরাং $\angle PSZ$ এক সমকোণের সমান।

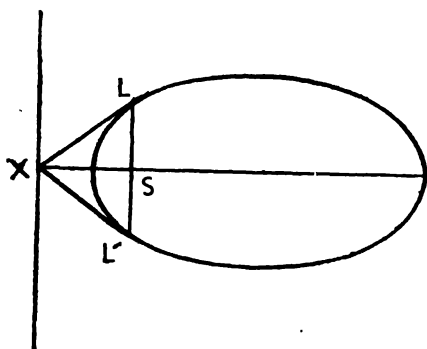
কিন্তু PSP′ একটি সরলরেখা ; সুতরাং $\angle P'SZ$ ও এক সমকোণের সমান।

অতএব P′Z উপবৃত্তের P′ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক।

অর্থাৎ P এবং P′এ অঙ্কিত উপবৃত্তের স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে নিয়ামকের উপর Z বিন্দুতে ছেদ করে।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। উপবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে নিয়ামক ও অক্ষের ছেদ-বিন্দুতে ছেদ করে। [কঃ বিঃ 1934.]

মনে কর উপবৃত্তের অক্ষ ও নিয়ামকের ছেদ বিন্দু X এবং LSL′ নাভিলম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, L এবং L′এ অঙ্কিত উপবৃত্তের স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে X বিন্দুতে ছেদ করে।

LX এবং L′X যোগ কর। যেহেতু LSX এবং L′SX উভয়ই এক সমকোণের সমান,

সুতরাং LX এবং L′X উভয়ই যথাক্রমে L এবং L′ বিন্দুতে উপবৃত্তের স্পর্শক।

অতএব L এবং L′এ অঙ্কিত উপবৃত্তের স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে X বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রশ্নমালা

১। উপবৃত্তের একটি নাভিগ জ্যা এবং তাহার প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় দেওয়া আছে; নাভি নির্ণয় কর।

২। উপবৃত্তের নাভিগ জ্যার প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৩। উপবৃত্তের নিয়ামকের যে কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শ-বিন্দু দুইটি এবং নাভি সমরেখ।

৪। উপবৃত্তের যে কোন নাভিগ জ্যার প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে নিয়ামক এবং জ্যার দ্বিখণ্ডক ব্যাসের ছেদ-বিন্দুতে ছেদ করে।

৫। উপবৃত্তের দুইটি নাভিগ জ্যা পরস্পরের উপর লম্ব; প্রমাণ কর যে, কোন একটি জ্যার প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় এবং অন্য জ্যা সমবিন্দু এবং সেই বিন্দু নিয়ামকের উপর অবস্থিত।

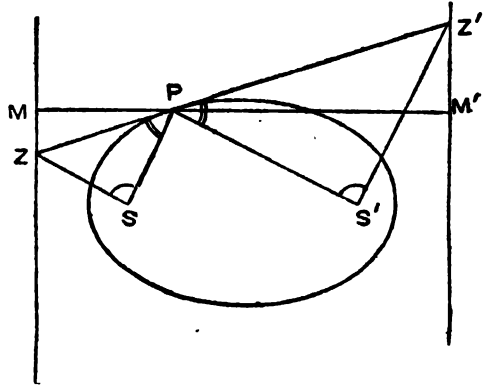
উপপাদ্য—১২

উপবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সহিত বিন্দুর নাভিগ-দূরত্ব দুইটি সমভাবে নত।

(The tangent at any point on an ellipse makes equal angles with the focal distances of the point.)

মনে কর ZPZ′ উপবৃত্তের যে কোন বিন্দু Pতে অঙ্কিত স্পর্শক; উহা নিয়ামকদের Z এবং Z′ বিন্দুতে ছেদ করে এবং SP ও S′P বিন্দুর নাভিগ-দূরত্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, SP ও S′P স্পর্শক ZPZ′এর সহিত সমভাবে নত; অর্থাৎ

$\angle SPZ = \angle S'PZ'$.

Pএর মধ্য দিয়া নিয়ামকের উপর MPM′ লম্ব টান। ZS এবং Z′S′ যোগ কর।

যেহেতু P বিন্দু উপবৃত্তের উপর অবস্থিত;

সুতরাং $SP = e \cdot PM$ এবং $S'P = e \cdot PM'$.

অতএব $\dfrac{SP}{S'P} = \dfrac{PM}{PM'}$.

PMZ এবং PM′Z′ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ;

সুতরাং $\dfrac{PM}{PM'} = \dfrac{PZ}{PZ'}$.

অতএব $\frac{SP}{S'P} = \frac{PZ}{PZ'}$.

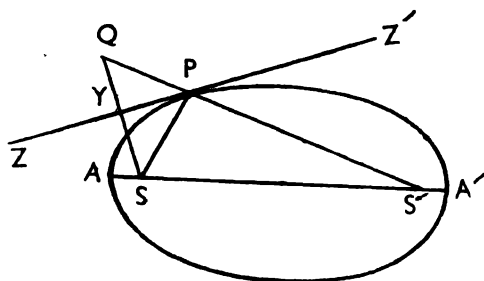
এখন PSZ এবং PS'Z' ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\frac{SP}{S'P} = \frac{PZ}{PZ'}$

এবং $\angle PSZ = \angle PS'Z'$ = এক সমকোণ ;

সুতরাং তাহারা সদৃশ।

অতএব $\angle SPZ = \angle S'PZ'$.

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। যদি উপবৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর SY লম্ব হয় এবং উহাকে বর্দ্ধিত করিলে বর্দ্ধিত S'Pকে Q বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে S'Qএর দৈর্ঘ্য ধ্রুব। [কঃ বিঃ 1939, '43, '49.]

$\angle SPZ = \angle S'PZ' = \angle QPZ$.

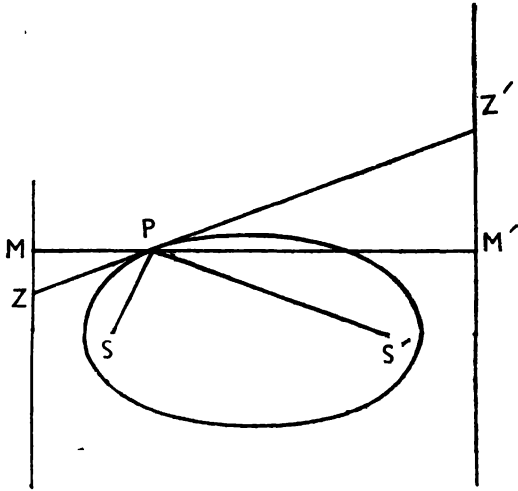
এখন PYS এবং PYQ ত্রিভুজ দুইটিতে $\angle SPY = \angle QPY$, $\angle SYP = \angle QYP$ = এক সমকোণ, এবং PY সাধারণ বাহু।

সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম।

অতএব $SP = PQ$.

কিন্তু $S'Q = S'P + PQ = S'P + SP = AA'$.

অতএব S'Qএর দৈর্ঘ্য ধ্রুব।

উদাঃ ২। উপবৃত্তের কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক নাভি-দূরত্বের সহিত যে কোণ করে তাহা স্পর্শক ও ঐ বিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর লম্বের মধ্যস্থিত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। [কঃ বিঃ 1946.]

মনে কর ZPZ' উপবৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং উহা নিয়ামকদের Z এবং Z' বিন্দুতে ছেদ করে।

P হইতে নিয়ামকদের উপর MPM' লম্ব টান।

PS এবং PS' যোগ কর।

যেহেতু ZPZ' পরাক্ষের সমান্তরাল নহে, অতএব স্পর্শকের একদিক PMএর নীচে এবং আর একদিক PM'এর উপরে থাকিবে।

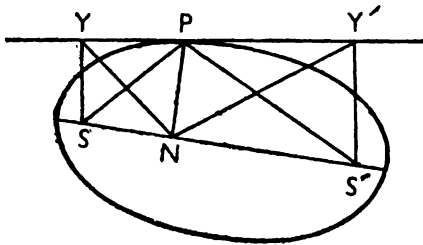
প্রমাণ করিতে হইবে যে, ZPS কোণ MPZ কোণ অপেক্ষা এবং Z'PS' কোণ M'PZ' কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

ZPZ' স্পর্শক, সুতরাং $\angle ZPS = \angle Z'PS'$.

$\angle MPZ =$ বিপ্রতীপ কোণ $\angle M'PZ'$,

কিন্তু S'PZ' কোণ S'PM' কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

অতএব ZPS কোণ MPZ কোণ অপেক্ষা এবং Z'PS' কোণ M'PZ' কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

উদাঃ ৩। উপবৃত্তের যে কোন বিন্দু Pতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর S এবং S' হইতে যথাক্রমে SY এবং S'Y' লম্ব আঁকা হইয়াছে। যদি PN, P বিন্দুর কোটি হয়, প্রমাণ কর যে, YNY' কোণকে PN দ্বিখণ্ডিত করে। [কঃ বিঃ 1941.]

$\angle SYP = \angle SNP =$ এক সমকোণ ;

সুতরাং P, N, S, Y বিন্দুসমূহ সমবৃত্ত। অতএব $\angle YNP = \angle PSY$.

পুনরায় $\angle S'Y'P = \angle S'NP =$ এক সমকোণ ;

সুতরাং P,N,S',Y' বিন্দুসমূহ সমবৃত্ত।

অতএব $Y'NP = \angle PS'Y'$.

এখন YPY' স্পর্শক ; সুতরাং $\angle SPY = S'PY'$.

$\angle SYP = \angle S'Y'P =$ এক সমকোণ।

সুতরাং $\angle PSY = \angle PS'Y'$, কারণ ইহারা সমান কোণের পূরক।

অতএব $\angle YNP = \angle Y'NP$;

অর্থাৎ YNY' কোণকে PN দ্বিখণ্ডিত করে।

প্রশ্নমালা

১। উপবৃত্তস্থ কোন বিন্দু Pকে নাভি S এবং S'এর সহিত যোগ করা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে SPS' কোণের বহিঃদ্বিখণ্ডক P বিন্দুতে উপবৃত্তকে স্পর্শ করে।

২। উপবৃত্তের দুইটি নাভি দেওয়া আছে ; বক্রস্থ যে কোন প্রদত্ত বিন্দুতে স্পর্শক আঁক। [কঃ বিঃ 1932.]

৩। উপবৃত্তের একটি নাভি, একটি স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দু দেওয়া আছে ; কেন্দ্র ও দ্বিতীয় নাভির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৪। উপবৃত্তের একটি নাভিগ জ্যা এবং তাহার দুই প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় দেওয়া আছে ; বক্র আঁক।

৫। উপবৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক নিয়ামকদের Z এবং Z' বিন্দুতে ছেদ করিলে SP অথবা S'Pএর উপর ZZ'এর অভিক্ষেপ ধ্রুব।

৬। উপবৃত্তের দুইটি নাভি ও স্পর্শক দেওয়া আছে ; স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।

৭। উপবৃত্তের একটি নাভি, দুইটি স্পর্শক ও তাহাদের স্পর্শবিন্দু দেওয়া আছে ; দ্বিতীয় নাভি নির্ণয় কর।

৮। উপবৃত্তের শীর্ষে অঙ্কিত স্পর্শক পরাক্ষের উপর লম্ব।

৯। যদি উপবৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক পরাক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $SP:S'P = ST:S'T$.

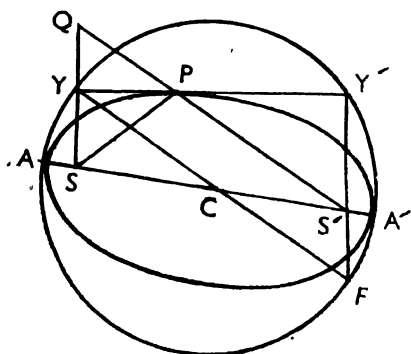
১০। যদি SPS' ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত পরাক্ষের যে দিকে P আছে সেই দিকে উপাক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করে, তবে PQ উপবৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

সংজ্ঞা : উপবৃত্তের পরাক্ষকে ব্যাস ধরিয়া বৃত্ত আঁকিলে তাহাকে **সহায়ক** বা **পারাক্ষিক বৃত্ত** (auxiliary circle) বলে।

উপপাদ্য—১৩

উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর যে-কোন নাভি হইতে লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ পারাক্ষিক বৃত্ত।

(The locus of the foot of the perpendiculars from either focus upon the tangent at any point to an ellipse is the auxiliary circle.)

মনে কর উপবৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর S এবং S′ হইতে যথাক্রমে SY এবং S′Y′ লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে Y অথবা Y′এর সঞ্চারপথ পারাক্ষিক বৃত্ত।

SP, S′P এবং YC যোগ কর।

SY এবং S′Pকে বর্দ্ধিত কর ; মনে কর তাহারা Q বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন P বিন্দুতে YPY′ স্পর্শক,

সুতরাং $\angle SPY = \angle S'PY'$.

আবার $\angle S'PY =$ বিপ্রতীপ কোণ YPQ ;

অতএব $\angle SPY = \angle YPQ$.

PSY এবং PYQ ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\angle PYS = \angle PYQ =$ এক সমকোণ ;

$\angle SPY = \angle YPQ$; এবং PY সাধারণ বাহু।

সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম।

অতএব $SP = PQ$ এবং $SY = YQ$.

কিন্তু $SP + S'P = AA'$;

সুতরাং $QP + PS' = QS' = AA'$.

এখন $S'SQ$ ত্রিভুজে SS'এর মধ্যবিন্দু C এবং SQএর মধ্যবিন্দু Y;

সুতরাং $CY = \frac{1}{2}QS' = \frac{1}{2}AA' = CA = CA'$.

অতএব Y বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত যাহার ব্যাস পরাক্ষ।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, Y' বিন্দুর সঞ্চারপথও পারাক্ষিক বৃত্ত।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। যদি নাভি হইতে যে কোন স্পর্শকের উপর SY এবং $S'Y'$ লম্ব হয়, প্রমাণ কর যে, $SY \cdot S'Y' = CB^2$.

YCকে পারাক্ষিক বৃত্ত পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর; [চিত্র—উপপাদ্য ১৩]

মনে কর উহা বৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। $S'F$ যোগ কর।

এখন CSY এবং $CS'F$ ত্রিভুজে

$CS = CS'$; $CY = CF$; এবং $\angle SCY =$ বিপ্রতীপ কোণ $\angle S'CF$;

অতএব ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম।

সুতরাং $\angle CSY =$ একান্তর কোণ $\angle CS'F$;

অর্থাৎ SY এবং $S'F$ সমান্তরাল; এবং $SY = S'F$.

কিন্তু SY এবং $S'Y'$ সমান্তরাল;

সুতরাং $Y'S'F$ একটি সরল রেখা।

এখন AA' এবং $Y'F$ পারাক্ষিক বৃত্তের দুইটি জ্যা এবং উহারা পরস্পরকে S' বিন্দুতে ছেদ করে;

সুতরাং $S'Y' \cdot S'F = AS' \cdot S'A'$

অর্থাৎ $SY \cdot S'Y' = SA \cdot SA' = CB^2$.

প্রশ্নমালা

১। যদি উপবৃত্তের P বিন্দুর কোটি PNকে বর্দ্ধিত করিতে পারাক্ষিক বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে তবে QN : PN = CA : CB. [Q এবং Pকে **অনুরূপ বিন্দু** বলে।]

২। Q বিন্দুতে অঙ্কিত পারাক্ষিক বৃত্তের স্পর্শক এবং P বিন্দুতে অঙ্কিত উপবৃত্তের স্পর্শক পরস্পরকে পরাক্ষর উপর ছেদ করে।

৩। উপবৃত্তের স্পর্শকের উপর নাভির প্রতিবিম্বের সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

৪। উপবৃত্তের একটি নাভি, দুইটি স্পর্শক ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; উপবৃত্ত এবং পারাক্ষিক বৃত্ত আঁক।

উপপাদ্য—১৪

উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব বিন্দুর নাভিগ দূরত্ব-দ্বয়ের মধ্যস্থিত কোণকে দ্বিখণ্ডিত করে।

(The normal at any point of an ellipse bisects the angle between the focal distances of the point.)

মনে কর TPT′ উপবৃত্তস্থ যে কোন P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক, PG অভিলম্ব এবং PS ও PS′ নাভিগ দূরত্ব।

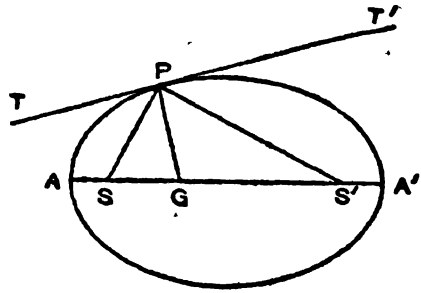
প্রমাণ করিতে হইবে যে, SPS′ কোণকে PG দ্বিখণ্ডিত করে।

TPT′ উপবৃত্তস্থ P বিন্দুতে স্পর্শক,

সুতরাং $\angle SPT = \angle S'PT'$.

PG অভিলম্ব, সুতরাং: $\angle TPG = \angle T'PG =$ এক সমকোণ

অতএব $\angle SPG = \angle S'PG$;

অর্থাৎ SPS′ কোণকে PG দ্বিখণ্ডিত করে।

উদাহরণমালা

উদাঃ ১। যদি উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু Pতে অঙ্কিত অভিলম্ব পরাক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, $SG = e \cdot SP$.

SPS′ ত্রিভুজে PG, SPS′ কোণের দ্বিখণ্ডক ;

সুতরাং $\dfrac{SP}{S'P} = \dfrac{SG}{S'G}$,

অর্থাৎ $\frac{SP}{SP+S'P}=\frac{SG}{SG+S'G}$,

অথবা $\frac{SP}{AA'}=\frac{SG}{SS'}$.

কিন্তু $SS'=e\cdot AA'$

অতএব $SG=e\cdot SP$.

উদাঃ ২। স্পর্শক না আঁকিয়া উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দুতে অভিলম্ব আঁক।

বিন্দুকে নাভিদ্বয়ের সহিত যোগ কর। নাভিগ দূরত্বদ্বয়ের মধ্যস্থিত কোণের দ্বিখণ্ডক আঁক। ইহাই নির্ণেয় অভিলম্ব।

প্রশ্নমালা

১। যদি উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু Pতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং অভিলম্ব উপাক্ষকে যথাক্রমে t এবং g বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে S, S′, P, t এবং g সমবৃত্ত।

২। যদি উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু Pতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং অভিলম্ব পরাক্ষকে যথাক্রমে T এবং G বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে $SG : S'G = ST : S'T$.

৩। যদি SPS′ ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত উপাক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে PG উপবৃত্তের P বিন্দুতে অভিলম্ব।

৪। যদি উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব পরাক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, $PG^2 : SP\cdot S'P = CB^2 : CA^2$.

৫। যদি P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর S এবং S′ হইতে যথাক্রমে SY এবং S′Y′ লম্ব আঁকা হয়, প্রমাণ কর যে, $\frac{2}{PG}=\frac{1}{S'Y'}+\frac{1}{SY}$, এবং SY ও S′Y পরস্পরকে P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের উপর ছেদ করে।

৭। যদি PG অভিলম্ব এবং PN কোটি হয়, প্রমাণ কর যে
(ক) $CG=e^2\cdot CN$; (খ) $NG : CN = CB^2 : CA^2$.

বিবিধ প্রশ্নমালা

১। উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু P এর কোটি PN এবং অর্দ্ধ-নাভিলম্ব SL, প্রমাণ কর যে $SP \backsim SL = e.SN$.

২। যদি দুইটি উপবৃত্তের একটি নাভি সাধারণ হয় এবং উভয়ের পরাক্ষ সমান হয়, প্রমাণ কর যে তাহাদের দ্বিতীয় নাভি দুইটির সংযোজক সাধারণ জ্যার উপর লম্ব হইবে।

৩। উপবৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যার প্রান্ত যোগ করিয়া সরল রেখা টানিলে তাহারা পরস্পরকে জ্যা গোষ্ঠীর দ্বিখণ্ডক ব্যাসের উপর ছেদ করে।

৪। উপবৃত্তস্থ দুইটি বিন্দুর কোন নাভি হইতে দূরত্ব সমান হইলে তাহারা পরাক্ষের বিপরীত দিকে অবস্থিত।

৫। যদি কোন সরলরেখার দুই প্রান্ত সর্ব্বদা দুইটি পরস্পর লম্ব সরল রেখার উপর থাকে তবে চলমান রেখার যে কোন বিন্দুর সঞ্চার পথ একটি উপবৃত্ত হইবে।

৬। উপবৃত্তের নাভিলম্ব উপাক্ষের অর্দ্ধ; উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

৭। PNP উপবৃত্তের একটি দ্বিকোটি এবং Q বক্রস্থ যে কোন বিন্দু; QP এবং QP′ পরাক্ষকে M এবং M′ বিন্দুতে ছেদ করে; প্রমাণ কর যে $CM \cdot CM' = CA^2$.

৮। যে কোন উপবৃত্তে $SP \cdot S'P = CA^2 + CB^2 - CP^2$.

৯। O এবং A দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু এবং OP নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একটি চল মান সরল রেখা। OPএর উপর এমন একটি বিন্দু Q লওয়া হইয়াছে যে $PQ = QA$; প্রমাণ কর যে Qএর সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত এবং O ও A ঐ উপবৃত্তের দুইটি নাভি।

১০। উপবৃত্তের একটি নাভিগ জ্যা PSP′এর প্রান্ত হইতে PN এবং P′N′ পরাক্ষের উপর লম্ব; প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{SN'} - \frac{1}{SN} = \frac{2}{XS}$.

১১। উপবৃত্তেয় নাভি এবং তিনটি স্পর্শক দেওয়া আছে; বক্র অঙ্কন কর।

১২। উপবৃত্তের একটি জ্যা PQ নিয়ামককে D বিন্দুতে ছেদ করে; প্রমাণ কর যে SP : PD = SQ : QD.

১৩। উপবৃত্তের নাভিগ জ্যা PQএর দুই প্রান্তে অঙ্কিত অভিলম্ব পরস্পরকে V বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, V বিন্দুর মধ্য দিয়া অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা টানিলে উহা PQকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

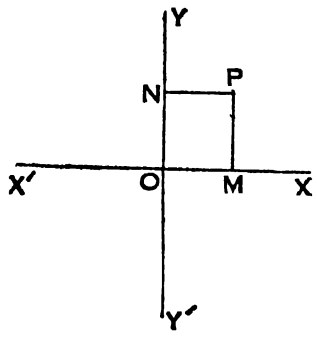
১৪। যদি উপবৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক পরাক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে এবং PN কোটি হয়; প্রমাণ কর যে $CN \cdot CT = CA^2$.

১৫। প্রমাণ কর যে SPS′ ত্রিভুজের অন্তর্লিখিত বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত।

১৬। উপবৃত্তের পরস্পর লম্ব স্পর্শক সমূহের ছেদ বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত। [এই বৃত্তকে **নিয়ামক বৃত্ত** (director circle) বলে এবং ইহার ব্যাসার্দ্ধ = AB.]

১৭। যদি উপবৃত্তের দুইটি পরস্পর লম্ব স্পর্শক TP এবং TP′ পরাক্ষিক বৃত্তকে যথাক্রমে H,K এবং H′,K′ বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, $HK^2 + H'K'^2$ ধ্রুব।

১৮। যদি উপবৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব পরাক্ষকে G এবং উপাক্ষকে G′ বিন্দুতে ছেদ করে প্রমাণ কর যে, (ক) $SP:S'P = PG:PG'$; (খ) $CG \cdot CT = CS^2$.

১৯। যদি CP, CD উপবৃত্তের দুইটি প্রতিযোগী অর্দ্ধ-ব্যাস হয় এবং PN ও DM কোটি হয়, তবে $CN^2 + CM^2 = a^2$, এবং $PN^2 + DM^2 = b^2$.

২০। যদি উপবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক শীর্ষদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটিকে T এবং T′ বিন্দুতে ছেদ করে; প্রমাণ কর যে TT′কে ব্যাস ধরিয়া বৃত্ত আঁকিলে তাহা নাভিদ্বয়ের মধ্য দিয়া যায়।

সমাপ্ত

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

প্রথম অধ্যায়

বিন্দুর স্থানাঙ্ক (Coordinates of points)

১। যে-কোন সমতলকে পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি নির্দ্দিষ্ট অসীম সরল রেখার দ্বারা চারিটি অংশে বিভক্ত করা যায়। ঐ রেখাদ্বয়ের সম্পর্কে, সমতলস্থিত যে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দ্দেশ করা যাইতে পারে। যেহেতু অসীম সরল রেখা দুইটি নির্দ্দিষ্ট, সুতরাং তাহাদের ছেদ বিন্দুও নির্দ্দিষ্ট। স্থির সরল রেখাদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে **অক্ষ** (axis) এবং ছেদ বিন্দুকে **মূলবিন্দু** (origin) বলে।

মনে কর, কোন নির্দ্দিষ্ট সমতলে XOX′ এবং YOY′ দুইটি নির্দ্দিষ্ট অসীম সরল রেখা; ইহারা পরস্পরকে লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে। তবে O মূলবিন্দু। XOX′ কে x-অক্ষরেখা বা **ভুজাক্ষ** (axis of x) এবং YOY′ কে y-অক্ষরেখা বা **কোটি-অক্ষ** (axis of y) বলা হয়। মনে কর P সমতলস্থ যে-কোন একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু। অক্ষদ্বয়ের উপর PM ও PN লম্ব টান। y-অক্ষরেখা হইতে P এর দূরত্ব অর্থাৎ PN এর দৈর্ঘ্যমানকে **ভুজ** (abscissa) এবং x-অক্ষরেখা হইতে Pএর দূরত্ব অর্থাৎ PMএর

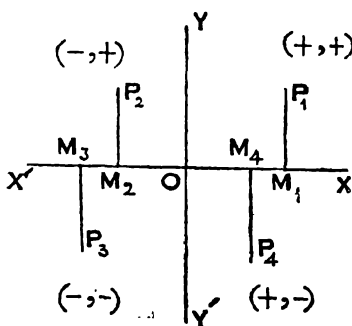
দৈর্ঘ্যমানকে **কোটি** (ordinate) বলা হয়। যেহেতু PN=OM, সুতরাং P বিন্দুর ভুজ বলিতে সাধারণতঃ OM বুঝায়। এখন যদি OM অর্থাৎ ভুজ এবং

MP অর্থাৎ কোটি জানা থাকে, তাহা হইলে P বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যাইতে পারে। সুতরাং কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটিকে বিন্দুর **স্থানাঙ্ক** (**co-ordinates**) বলে।

এইখানে উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্দ্দেশ করিতে হইলে প্রথমে বিন্দুর ভুজ এবং তাহার পর বিন্দুর কোটি বলিতে হয়। (x, y) বিন্দু বলিতে বুঝায় এমন একটি বিন্দু যাহার ভুজ x এবং কোটি y.

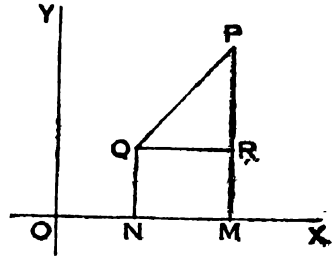
XOX′এর উপর মূল বিন্দুর ডানদিকে দৈর্ঘ্যমান ধনাত্মক এবং বামদিকে ঋণাত্মক ধরা হয়। তেমনই YOY′এর উপর মূল বিন্দুর উপর দিকে দৈর্ঘ্যমান ধনাত্মক এবং নীচের দিকে ঋণাত্মক ধরা হয়।

সমতলস্থ যে-কোন বিন্দু P হইতে x-অক্ষের উপর PM লম্ব আঁকিলে বিন্দুর স্থানাঙ্ক (OM, PM); মূলবিন্দু Oএর ডানদিকে M বিন্দু থাকিলে P বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক এবং বামদিকে থাকিলে ঋণাত্মক বলা হয়। তেমনই P বিন্দু XOX′এর উপরিভাগে থাকিলে P বিন্দুর কোটি ধনাত্মক এবং নীচে থাকিলে ঋণাত্মক বলা হয়।

২। অক্ষদ্বয় সমতলকে চারিটি অংশ বিভক্ত করিয়াছে। XOY কোণের মধ্যস্থিত অংশ, YOX′ কোণের মধ্যস্থিত অংশ, X′OY′ কোণের মধ্যস্থিত অংশ এবং YOX কোণের মধ্যস্থিত অংশ। ইহাদের যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ **পাদ** (**quadrant**) বলা হয়।

সমতলস্থ যে-কোন বিন্দু এই চারিটি পাদের কোথাও নিশ্চয়ই থাকিবে। যদি বিন্দুটি প্রথমপাদে থাকে, ধর বিন্দুটির অবস্থান P_1, তবে বিন্দুর ভুজ OM_1 ধনাত্মক এবং কোটি P_1M_1ও ধনাত্মক। যদি বিন্দুটি দ্বিতীয় পাদে থাকে,

ধর বিন্দুটির অবস্থান P_2, তবে বিন্দুর ভুজ OM_2 ঋণাত্মক কিন্তু কোটি $P_2 M_2$ ধনাত্মক। যদি বিন্দুটি তৃতীয় পাদে থাকে, ধর বিন্দুটির অবস্থান P_3, তবে বিন্দুর ভুজ OM_3 ঋণাত্মক এবং কোটি $P_3 M_3$ও ঋণাত্মক। যদি বিন্দুটি চতুর্থ পাদে থাকে, ধর বিন্দুটির অবস্থান P_4, তবে বিন্দুর ভুজ OM_4 ধনাত্মক কিন্তু কোটি $P_4 M_4$ ঋণাত্মক। অতএব বিন্দুর ভুজ-কোটি দেওয়া থাকিলে বিন্দুটি কোন পাদে আছে নির্ণয় করা যায়। ভুজ এবং কোটি উভয় ধনাত্মক হইলে বিন্দু প্রথম পাদে থাকে, ভুজ ঋণাত্মক এবং কোটি ধনাত্মক হইলে দ্বিতীয় পাদে, ভুজ এবং কোটি উভয় ঋণাত্মক হইলে তৃতীয় পাদে এবং ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক হইলে বিন্দু চতুর্থ পাদে থাকে। মূল বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$, কারণ ভুজ ও কোটি উভয়ই শূন্য।

৩। **দুইটি প্রদত্ত বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয়ঃ**

মনে কর দুইটি প্রদত্ত বিন্দু P এবং Q যাহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2). PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে।

P এবং Q হইতে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM এবং QN লম্ব আঁক এবং Q হইতে PM এর উপর QR লম্ব টান।

এখন $QR = NM = OM - ON = x_1 - x_2$;

এবং $PR = PM - RM = PM - QN = y_1 - y_2$

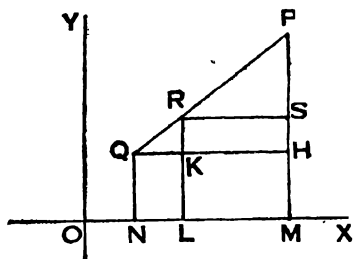
ত্রিভুজ PRQ সমকোণী ; সুতরাং $PQ^2 = QR^2 + PR^2$.

অতএব $PQ^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

অর্থাৎ $PQ = \sqrt{\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}}$.

অনুসিদ্ধান্তঃ যদি মূল বিন্দু হইতে P এর দূরত্ব নির্ণয় করিতে হয়, তবে

$x_2=0$ এবং $y_2=0$; কারণ তখন Q এবং O এক হইয়া যাইবে। অতএব $OP=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)}$.

৪। দুইটি প্রদত্ত বিন্দুর মধ্যের দূরত্বকে যে-কোন অনুপাতে বিভক্ত করা ঃ

মনে কর P (x_1, y_1) এবং Q (x_2, y_2) দুইটি প্রদত্ত বিন্দু এবং R এমন একটি বিন্দু যাহা PQ কে কোন নির্দিষ্ট অনুপাতে, $(m_1 : m_2)$ বিভক্ত করে। তবে $PR : RQ = m_1 : m_2$

R বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর ইহার স্থানাঙ্ক (x, y); P, R, Q হইতে অক্ষের উপর যথাক্রমে PM, RL, QN লম্ব টান, এবং Q ও R হইতে PM এর উপর যথাক্রমে QH ও RS লম্ব টান।

তবে $RS=KH=LM=OM-OL=x_1-x$,

$$QK=OL-ON=x-x_2,$$

এবং $PS=PM-SM=PM-RL=y_1-y$,

$$RK=RL-KL=RL-QN=y-y_2.$$

এখন QHP এবং QKR সদৃশ ত্রিভুজদ্বয়; সুতরাং $\frac{PR}{QR}=\frac{RS}{QK}=\frac{PS}{RK}$.

অর্থাৎ $\frac{m_1}{m_2}=\frac{x_1-x}{x-x_2}=\frac{y_1-y}{y-y_2}$.

প্রথম ও দ্বিতীয় হইতে $x=\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$

এবং প্রথম ও তৃতীয় হইতে $y=\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$.

অতএব R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$

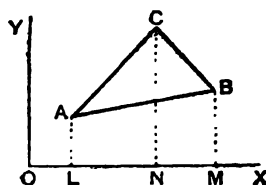
যদি PQ কে $m_1 : m_2$ এর অনুপাতে R বিন্দুতে বহির্বিভক্ত করা হয় অর্থাৎ $\frac{PR}{RQ} = \frac{m_1}{-m_2}$ হয়,

তবে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$.

যদি R, PQ এর মধ্যবিন্দু হয় তবে $m_1 = m_2$;

সুতরাং R বিন্দুর স্থানাঙ্ক [$\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$].

৫। **তিনটি প্রদত্ত বিন্দুর সংযোগে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় :**

মনে কর তিনটি বিন্দু A, B, C যাহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3). ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

A, B, C হইতে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে AL, BM, CN লম্ব টান।

এখন ML $= x_2 - x_1$, LN $= x_3 - x_1$, MN $= x_2 - x_3$.

$\therefore$ ক্ষেত্রফল ABC = ক্ষেত্র ACNL + ক্ষেত্র CBMN − ক্ষেত্র ABML

$$= \frac{1}{2}\,\text{LN}\,(\text{AL} + \text{CN}) + \frac{1}{2}\,\text{NM}(\text{CN} + \text{BM}) - \frac{1}{2}\,\text{LM}(\text{AL} + \text{BM})$$

$$= \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_1 + y_3) + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_3 + y_2) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1).$$

অনুসিদ্ধান্ত : যদি A, B, C সমরেখ হয়, তবে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হইবে।

সুতরাং (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) সমরেখ হইতে হইলে

$$x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1 = 0.$$

উদাহরণমালা

উদা ঃ ১। ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষের স্থানাঙ্ক (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) ; ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর।

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এর মধ্য বিন্দু $[\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(y_1+y_2)]$.

এই বিন্দু এবং (x_3, y_3) এর সংযোগকে $2:1$ এর অনুপাতে বিভক্ত করিতে হইবে।

সুতরাং যদি $(\bar{x}, \bar{y})$ ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হয়, তবে

$$\bar{x}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}(x_1+x_2)+x_3}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}.$$

এবং $$\bar{y}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}(y_1+y_2)+y_3}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

উদাঃ ২। প্রমাণ কর যে (4, 2), (7, 5) এবং (9, 7) সমরেখ।

এই তিনটি বিন্দুর সংযোগে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$=\tfrac{1}{2}(4 . 5+7 . 7+9 . 2-2 . 7-5 . 9-7 . 4)$$
$$=0.$$

অতএব বিন্দু তিনটি সমরেখ।

প্রশ্নমালা ১

১। নিম্নলিখিত বিন্দু দ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর :

(ক) (1, 3) এবং (4, 7) ;

(খ) (2, −7) এবং (−3, 5) ;

(গ) (a, o) এবং (o, b) ;

(ঘ) $(b+c, c+a)$ এবং $(c+a, a+b)$;

(ঙ) $(a \cos\theta, a \sin\theta)$ এবং $(a \cos\phi, a \sin\phi)$;

(চ) $(a t_1^2, 2a t_1)$ এবং $(a t_2^2, 2at_2)$;

(ছ) $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ এবং $(a \sin \theta, b \cos \theta)$;

(জ) $(ct_1, \frac{c}{t_1})$ এবং $(ct_2, \frac{c}{t_2})$;

(ঝ) (o, o) এবং $(a \cos \theta + b \sin \theta, b \cos \theta - a \sin \theta)$.

২। প্রমাণ কর যে $(2a, 4a)$, $(2a, 6a)$ এবং $(2a+\sqrt{3}a, 5a)$ একটি সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ ও উহার বাহু $=2a$.

৩। প্রমাণ কর যে $(3, 2)$, $(1, 0)$ এবং $(2-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$ একটি সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ, এবং ইহার বাহু নির্ণয় কর।

৪। প্রমাণ কর যে নিম্নলিখিত বিন্দুসমূহ ক্রমিক ভাবে সংযোগ করিলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয় :—

(ক) $(-2, -1)$, $(1, 0)$, $(4, 3)$ এবং $(1, 2)$;

(খ) $(5, 2)$, $(3, 7)$, $(-1, 4)$ এবং $(1, -1)$;

(গ) $(5, 10)$, $(7, 3)$, $(15, 5)$ এবং $(13, 12)$.

৫। এমন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর, যাহা :—

(ক) $(1, 3)$ এবং $(2, 7)$ এর সংযোগকে $3 : 4$ এর অনুপাতে বিভক্ত করে ;

(খ) $(4, 5)$ এবং $(7, -1)$ এর সংযোগকে $1 : 2$ এর অনুপাতে বিভক্ত করে ;

(গ) $(-1, 2)$ এবং $(4, -5)$ এর সংযোগকে $2 : 3$ এর অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে ;

(ঘ) $(-3, -4)$ এবং $(-8, 7)$ এর সংযোগকে $7 : 5$ এর অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

৬। $(1, -2)$ এবং $(-3, 4)$ এর সংযোগকে ত্রিখণ্ডিত করা হইয়াছে ; মাঝের বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

৭। $(-6, 4)$ এবং $(4, -6)$ এর সংযোগকে চারিটি সমঅংশে বিভক্ত করা হইয়াছে ; মাঝের বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

৮। $(a+b, a-b)$ এবং $(a-b, a+b)$ এর সংযোগকে $a:b$ এর অনুপাতে অন্তঃ এবং বহির্বিভক্ত করা হইয়াছে ; বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

৯। প্রমাণ কর যে $(2, 7)$ $(3, -5)$ এবং $(-5, -2)$ এর সংযোগে উৎপন্ন ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র মূলবিন্দু।

১০। নিম্নলিখিত বিন্দুত্রয়ের সংযোগে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তাহার পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর :

(ক) $(5, 7)$, $(-1, -1)$ এবং $(-2, 6)$;

(খ) $(1, 1)$, $(2, 3)$ এবং $(-2, 2)$;

(গ) $(2, 4)$, $(5, 3)$ এবং $(6, 2)$;

(ঘ) $(9, 7)$, $(-8, 14)$ এবং $(-3, -11)$.

১১। নিম্নলিখিত বিন্দুত্রয়ের সংযোগে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

(ক) $(5, 2)$, $(-9, -3)$ এবং $(-3, -5)$;

(খ) $(4, 1)$, $(-4, 4)$ এবং $(8, -3)$;

(গ) $(a, b+c)$, $(a, b-c)$ এবং $(-a, c)$;

(ঘ) $(0, 3)$, $(5, 0)$ এবং $(0, 0)$;

(ঙ) $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ এবং $(at_3^2, 2at_3)$;

(চ) $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$, $(a\cos\beta, b\sin\beta)$ এবং $(a\cos\gamma, b\sin\gamma)$;

(ছ) $(am_1, \frac{a}{m_1})$, $(am_2, \frac{a}{m_2})$ এবং $(am_3, \frac{a}{m_3})$;

(জ) $[at_1t_2, a(t_1+t_2)]$, $[at_2t_3, a(t_2+t_3)]$ এবং $[at_3t_1, a(t_3+t_1)]$.

১২। প্রমাণ কর যে নিম্নলিখিত বিন্দুত্রয় সমরেখ :

(ক) $(4, 2)$, $(7, 5)$ এবং $(9, 7)$;

(খ) $(1, 4)$, $(3, -2)$ এবং $(-3, 16)$;

(গ) $(3, 2)$, $(7, 3)$ এবং $(15, 5)$;

(ঘ) $(a, b+c)$, $(b, c+a)$ এবং $(c, a+b)$.

১৩। প্রমাণ কর যে (a, o), (o, b) এবং $(1, 1)$ সমরেখ হইবে, যদি $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ হয়।

১৪। প্রমাণ কর যে (a, b), (a', b') এবং $(a-a', b-b')$ সমরেখ হইবে, যদি $ab'=a'b$ হয়।

১৫। প্রমাণ কর যে $(-5, -6)$, $(0, -3)$, $(5, 0)$ এবং $(10, 3)$ সমরেখ।

দ্বিতীয় অধ্যায়

সরল রেখা (The straight line)

৬। সংজ্ঞা : যদি এক অথবা একাধিক নিয়মানুবর্ত্তী হইয়া কোন বিন্দু নড়িয়া বেড়ায়, তবে তাহার গতি পথকে ঐ বিন্দুর **সঞ্চারপথ** (locus) বলা হয়। বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা এই নিয়মকে প্রকাশ করিলে সঞ্চারপথের **সমীকরণ** **(equation)** পাওয়া যায়। সঞ্চারপথের লৈখিক চিত্রের ইহা গাণিতিক বর্ণনা। সঞ্চার পথের উপরিস্থ বিন্দু সমূহ ব্যতীত অন্য কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণ সিদ্ধ হয় না।

৭। **অক্ষের সমান্তরাল সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় :**

মনে কর AB, y-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহাদের মধ্যে দূরত্ব OA $=a$.

মনে কর এই সরল রেখার উপর P যে কোন একটি বিন্দু, যাহার স্থানাঙ্ক (x, y).

এই সরল রেখার উপর P যেখানেই থাকুক না কেন, P-এর ভুজ সর্ব্বদাই a ; এবং এই সরল রেখা ব্যতীত অন্য কোন বিন্দুর ভুজ a হইতে পারে না।

অতএব y-অক্ষের সমান্তরাল সরল রেখার সমীকরণ $x=a$, যেখান a উহাদের মধ্যে দূরত্ব।

যদি $a=0$, তবে এই সরল রেখা y-অক্ষের সহিত মিশিয়া যায়। অতএব y-অক্ষের সমীকরণ $x=0$.

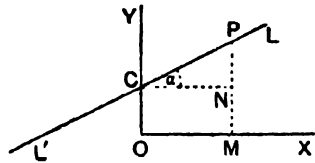
অনুরূপ ভাবে, মনে কর CD, x-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহাদের মধ্যে দূরত্ব OC $=c$. মনে কর এই সরল রেখার উপর P যে-কোন একটি বিন্দু, যাহার স্থানাঙ্ক (x, y).

এই সরল রেখার উপর P যেখানেই থাকুক না কেন, P এর কোটি সর্ব্বদাই c; এবং এই সরল রেখা ব্যতীত অন্য কোন বিন্দুর কোটি c হইতে পারে না।

অতএব x-অক্ষের সমান্তরাল সরল রেখার সমীকরণ $y=c$ যেখানে c উহাদের মধ্যে দূরত্ব।

যদি $c=0$, তবে এই সরল রেখা x অক্ষের সহিত মিশিয়া যায়। অতএব x-অক্ষের সমীকরণ $y=o$.

৮। **একটি সরল রেখা y-অক্ষের উপর কোন প্রদত্ত অংশ ছেদ করে এবং x-অক্ষের উপর কোন প্রদত্ত কোণে নত; ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর।**

মনে কর LL′ একটি সরল রেখা, যাহা y-অক্ষের উপর OC $=c$ অংশ ছেদ করে এবং x-অক্ষের উপর α কোণে নত; অর্থাৎ $\angle$PCN $=\alpha$.

মনে কর এই সরল রেখার উপর P যে-কোন একটি বিন্দু, যাহার স্থানাঙ্ক (x, y). P হইতে x-অক্ষের উপর PM এবং C হইতে PM এর উপর CN টান।

তাহা হইলে PM $=y$, CN $=$ OM $=x$

এবং PN $=$ PM $-$ NM $=$ PM $-$ OC $=y-c$.

সমকোণী ত্রিভুজ PNC হইতে পাওয়া যায় $tan\ \alpha=\frac{PN}{CN}=\frac{y-c}{x}$.

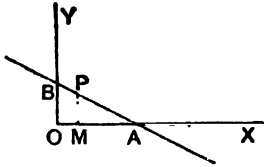
যদি $tan\ \alpha$ কে m বলা যায়, তবে $y=mx+c$.

এই সরল রেখার উপর P বিন্দু যেখানেই থাকুক না কেন, x এবং y এর মধ্যে সর্বদাই এই সম্বন্ধ থাকিবে; এবং এই সরল রেখা ব্যতীত অন্য কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক এই সম্বন্ধকে সিদ্ধ করিবে না।

অতএব প্রদত্ত সরল রেখার সমীকরণ $y=mx+c$, যেখানে y অক্ষের ধনাত্মক দিকে মূল বিন্দু হইতে ছেদিতাংশের মান c, এবং $m=tan\ \alpha$, যেখানে α, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত প্রদত্ত সরল রেখার নতি। সাধারণতঃ m কে সরল রেখার **প্রবণতা** (gradient) বলে। ইহা নতির ট্যাঞ্জেণ্টের সমান। এই সমীকরণকে সরল রেখার **ট্যাঞ্জেণ্ট রূপ** (tangent form) বলা হয়। যদি প্রদত্ত সরল রেখা মূল বিন্দুগামী হয় তবে y অক্ষের উপর ছেদিতাংশ অর্থাৎ $c=0$; সুতরাং ইহার সমীকরণ হইবে $y=mx$.

টীকা ঃ যদি সরল রেখা y-অক্ষকে ঋণাত্মক দিকে অর্থাৎ OY′ এর উপর ছেদ করে, তবে c ঋণাত্মক হইবে।

ছবিতে LL′, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত α কোণ করিতেছে এবং ইহা সূক্ষ্মকোণ; সেই জন্য m অর্থাৎ $tan\alpha$ ধনাত্মক লওয়া হইয়াছে। যদি α স্থূলকোণ হয় তবে m ঋণাত্মক লইতে হইবে। কোণ সর্ব্বদা OX হইতে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিক দিয়া মাপিতে হইবে।

৯। **একটি সরল রেখা উভয় অক্ষের উপর প্রদত্ত অংশ ছেদ করে ; ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর।**

মনে কর AB একটি সরল রেখা। উহা x-অক্ষের উপর OA $=a$ এবং y-অক্ষের উপর OB $=b$ দৈর্ঘ্যের অংশ ছেদ করে।

মনে কর এই সরল রেখার উপর P যে-কোন একটি বিন্দু, যাহার স্থানাঙ্ক (x, y). P হইতে x-অক্ষের উপর PM লম্ব টান।

তবে PM $=y$, এবং OM $=x$.

AOB এবং AMP ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ, সুতরাং $\dfrac{OM}{OA}=\dfrac{PB}{AB}$.

এবং $\dfrac{PM}{OB}=\dfrac{AP}{AB}$.

$$\therefore \frac{OM}{OA}+\frac{PM}{OB}=\frac{PB+AP}{AB}=1,$$

অর্থাৎ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

এই সরল রেখার উপর P বিন্দু যেখানেই থাকুক না কেন, x এবং y এর মধ্যে সর্ব্বদাই এই সম্বন্ধ থাকিবে ; এবং এই সরল রেখা ব্যতীত অন্য কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক এই সম্পর্ককে সিদ্ধ করিবে না।

অতএব প্রদত্ত সরল রেখার সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, যেখানে a এবং b যথাক্রমে x এবং y অক্ষের ধনাত্মক দিকের ছেদিতাংশ।

এই সমীকরণকে সরল রেখার **ছেদিতাংশ রূপ** **(intercept form)** বলা হয়।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

ত্রিভুজ AOB এর ক্ষেত্রফল = ত্রিভুজ AOP এর ক্ষেত্রফল + ত্রিভুজ POB এর ক্ষেত্রফল ;

সুতরাং $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}bx.$

অতএব $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

টীকা ঃ a এবং b এর চিহ্ন সম্বন্ধে সতর্ক থাকিতে হইবে। যদি সরল রেখা OX এবং OY′ কে ছেদ করে তবে a ধনাত্মক এবং b ঋণাত্মক হইবে ; যদি OX′ এবং OY কে ছেদ করে তবে a ঋণাত্মক এবং b ধনাত্মক হইবে ; এবং যদি OX′ এবং OY′ কে ছেদ করে তবে a এবং b উভয়ই ঋণাত্মক হইবে।

১০। x এবং y এর একঘাত সমীকরণ একটি সরল রেখাকে প্রকাশ করে।

x এবং y এর সাধারণ একঘাত সমীকরণ $Ax+By+C=0$, যেখানে সহগ A, B এবং C ধ্রুব।

মনে কর (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) সঞ্চার পথের উপর যে-কোন দুইটি বিন্দু।

তাহা হইলে ইহারা সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে ;

সুতরাং $Ax_1+By_1+C=0$

এবং $Ax_2+By_2+C=0$

প্রথমটিকে m_2 এবং দ্বিতীয়টিকে m_1 দিয়া গুণ করিয়া যোগ করিলে,

$$A(m_2x_1+m_1x_2)+B(m_2y_1+m_1y_2)+C(m_2+m_1)=0.$$

এইবার (m_2+m_1) দিয়া ভাগ করিলে,

$$A\left(\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_2+m_1}\right)+B\left(\frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_2+m_1}\right)+C=0.$$

সুতরাং যে বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_2+m_1}, \frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_2+m_1}\right)$, তাহা $Ax+By+C=0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

অতএব $\left(\frac{m_2x_1+m_1y_2}{m_2+m_1}, \frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_2+m_1}\right)$ বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর অবস্থিত।

কিন্তু এই বিন্দুটি (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এর সংযোগকে $m_1 : m_2$ এর অনুপাতে বিভক্ত করে ; সুতরাং সংযোগ রেখার উপরই অবস্থিত। m_1 এবং m_2 এর বিভিন্ন মান বসাইলে এই সংযোগ রেখার উপর বিভিন্ন বিন্দু পাওয়া যায়। কিন্তু m_1 এবং m_2 এর মান যাহাই হউক না কেন, কোন অবস্থাতেই এই বিন্দু সংযোগ রেখার বাহিরে যাইতে পারে না।

সুতরাং সঞ্চার পথ অর্থাৎ $Ax+By+C=0$ একটি সরল রেখা।

অতএব x এবং y এর একঘাত সমীকরণ একটি সরল রেখাকে প্রকাশ করে।

এই সমীকরণকে সরল রেখার **সাধারণ রূপ (general form)** বলা হয়।

লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, সমীকরণে প্রকৃত পক্ষে দুইটি ধ্রুব রাশি আছে,

কারণ যে-কোন একটি সহগ দ্বারা সমগ্র সমীকরণকে ভাগ করা যায়। অতএব কোন সরল রেখা নির্দ্দেশ করিতে হইলে দুইটি সম্পর্কের প্রয়োজন।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

মনে কর সঞ্চার পথের উপর (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) তিনটি বিন্দু।

তবে তাহারা সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে। অতএব,

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0,$$

$$Ax_3 + By_3 + C = 0.$$

প্রথম দুইটিকে বজ্রগুণন দ্বারা সমাধান করিলে,

$$\frac{A}{y_1 - y_2} = \frac{B}{x_2 - x_1} = \frac{C}{x_1y_2 - x_2y_1}$$

তৃতীয়টিতে A, B, C এর এই মান বসাইলে,

$(y_1 - y_2)x_3 + (x_2 - x_1)y_3 + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$

অর্থাৎ $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1 = 0.$

সুতরাং বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অতএব $Ax + By + C = 0$ একটি সরল রেখাকে প্রকাশ করে।

১১। $Ax + By + C = 0$ সমীকরণকে ট্যাজেণ্ট অথবা ছেদিতাংশ রূপেও প্রকাশ করা যায়।

যেহেতু $By = -Ax - C$, সুতরাং $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

ইহা $y = mx + c$ হইবে, যখন $m = -\frac{A}{B}$ এবং $c = -\frac{C}{B}$.

পুনরায় $Ax + By = -C$.

সুতরাং $\frac{x}{C}+\frac{y}{C}=1.$

ইহা $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ হইবে, যখন $a=-\frac{C}{A}$ এবং $b=-\frac{C}{B}$.

১২। প্রদত্ত বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের উপর প্রদত্ত কোণে নত সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় ঃ

মনে কর প্রদত্ত বিন্দু (x_1, y_1) এবং x-অক্ষের উপর প্রদত্ত নতি θ ; এবং মনে কর এই সরল রেখার সমীকরণ $y=mx+c$, যেখানে m এবং c ধ্রুব। m এবং c এমন ভাবে লইতে হইবে, যাহাতে ইহা নির্ণেয় সরল রেখা হয়।

সুতরাং ইহাকে (x_1, y_1) মধ্য দিয়া যাইতে হইবে, অর্থাৎ (x_1, y_1) এই সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে।

$\therefore \quad y_1=mx_1+c$; অর্থাৎ $y-y_1=m(x-x_1)$

এই সমীকরণের $m=\tan\theta$ হইতে হইবে।

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ $y-y_1=m(x-x_1)$, যেখানে $m=\tan\theta$.

১৩। দুইটি প্রদত্ত বিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় ঃ

মনে কর প্রদত্ত বিন্দু দুইটি (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) ; এবং মনে কর এই সরল রেখার সমীকরণ $y=mx+c$, যেখানে m এবং c ধ্রুব। m এবং c এমন ভাবে লইতে হইবে, যাহাতে ইহা নির্ণেয় সরল রেখা হয়।

সুতরাং ইহাকে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এর মধ্য দিয়া যাইতে হইবে, অর্থাৎ (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এই সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে।

$\therefore \quad y=mx+c$

(x_1, y_1) দ্বারা সিদ্ধ বলিয়া, $y_1=mx_1+c$;

এবং (x_2, y_2) দ্বারা সিদ্ধ বলিয়া, $y_2=mx_2+c$.

সুতরাং $\quad y-y_1=m(x-x_1).$

এবং $\quad y_1-y_2=m(x_1-x_2).$

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2}$,

অথবা $y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$.

এই সরল রেখার $m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\text{কোটির অন্তর}}{\text{ভুজের অন্তর}}$.

উদাহরণমালা

উদা ঃ ১। একটি সরল রেখা y-অক্ষকে মূল বিন্দু হইতে 3 একক দূরত্বে ছেদ করে এবং x-অক্ষের উপর $60°$ কোণে নত ; ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

এক্ষেত্রে সরল রেখার ট্যাঞ্জেণ্ট রূপ ব্যবহার করিতে হইবে। মনে কর নির্ণেয় সমীকরণ $y=mx+c$.

এখন $c=3$, এবং $m=tan\ 60°=\sqrt{3}$.

স্থতরাং নির্ণেয় সমীকরণ $y=\sqrt{3}x+3$.

উদা ঃ ২। একটি সরল রেখা (5, 6) বিন্দুর মধ্য দিয়া যায় এবং অক্ষদ্বয়ের উপর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত অংশ ছেদ করে ; ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং এই সরল রেখার উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহার কোটি ভুজের দ্বিগুণ। [কঃ বিঃ 1934.]

এক্ষেত্রে সরল রেখার ছেদিতাংশ রূপ ব্যবহার করিতে হইবে। মনে কর নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

যেহেতু ইহা (5, 6) এর মধ্য দিয়া যায়, স্থতরাং $\frac{5}{a}+\frac{6}{b}=1$.

পুনরায় যেহেতু ছেদিতাংশ সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত, স্থতরাং $a=-b$.

$\therefore \quad a=-1, b=1$.

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1$ অর্থাৎ $x-y+1=0$.

মনে কর সরল রেখার উপর $(h, 2h)$ একটি বিন্দু যাহার কোটি $(=2h)$ ভুজের $(=h)$ দ্বিগুণ।

$\therefore \quad h-2h+1=0$ অর্থাৎ $h=1$.

অতএব নির্ণেয় বিন্দু $(1, 2)$.

উদাঃ ৩। $(1, 2)$ এবং $(2, 1)$ বিন্দু দুইটির মধ্যগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং এই সরল রেখার অক্ষদ্বয় দ্বারা ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1936.]

মনে কর নির্ণেয় সরল রেখার সমীকরণ $y=mx+c$.

যেহেতু ইহা $(1, 2)$ এবং $(2, 1)$ বিন্দু দুইটির মধ্য দিয়া যায়,

স্নুতরাং $2=m+c$ এবং $1=2m+c$.

অতএব $\quad m=-1$ এবং $c=3$.

স্নুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y=-x+3$ অর্থাৎ $x+y=3$.

ইহার ছেদিতাংশ রূপ $\quad \frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$.

স্নুতরাং অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ 3 এবং 3.

অতএব সরল রেখার অক্ষদ্বয়ের দ্বারা ছেদিতাংশ $=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

প্রশ্নমালা ২(ক)

১। একটি সরল রেখা y-অক্ষ হইতে -3 অংশ ছেদ করে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 45° কোণে নত ; ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

এই সরল রেখার লৈখিক চিত্র আঁক এবং জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ কর যে ইহা $x+y=2$ সরল রেখার উপর লম্ব। [কঃ বিঃ 1939.]

২। এমন সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহার

(ক) y-অক্ষের উপর ছেদিতাংশ $=2$, এবং x-অক্ষের উপর নতি 30° ;

(খ) y-অক্ষের উপর ছেদিতাংশ $= -4$ এবং উভয় অক্ষের উপর নতি সমান ;

(গ) y-অক্ষের উপর ছেদিতাংশ $= 3$ এবং x-অক্ষের উপর নতি $135°$;

(ঘ) y-অক্ষের উপর ছেদিতাংশ $= -3$ এবং x-অক্ষের উপর নতি $\tan^{-1} \frac{3}{5}$.

৩। এমন সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহার অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ

(ক) 2 এবং 3 ; (খ) -4 এবং 5 ;

(গ) -3 এবং -4 ; (ঘ) 2 এবং -5 ;

৪। এমন একটি সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহা $(5, -4)$ বিন্দুর মধ্যগামী এবং যাহার x-অক্ষের উপর নতি $135°$.

৫। এমন একটি সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহা $(3, -4)$ বিন্দুর মধ্যগামী এবং যাহার উভয় অক্ষের উপর ছেদিতাংশ দৈর্ঘ্যে সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

৬। $3x+4y+5=0$ সমীকরণকে (ক) ট্যাঞ্জেণ্ট (খ) ছেদিতাংশ রূপে প্রকাশ কর।

৭। নিম্নলিখিত বিন্দু যুগলের মধ্যগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :

(ক) $(0, 0)$ এবং $(1, 2)$; (খ) $(2, 3)$ এবং $(4, 5)$;

(গ) $(-1, 3)$ এবং $(6, -7)$; (ঘ) (a, o) এবং (o, b) ;

(ঙ) $(at_1, \frac{a}{t_1})$ এবং $(at_2, \frac{a}{t_2})$;

(চ) $(at_1^2, 2at_1)$ এবং $(at_2^2, 2at_2)$;

(ছ) $(a \cos \alpha, b \sin \alpha)$ এবং $(a \cos \beta, b \sin \beta)$;

(জ) $(a \sec \alpha, b \tan \alpha)$ এবং $(a \sec \beta, b \tan \beta)$.

৮। প্রমাণ কর যে (3, 5) এবং (6, 10) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যগামী সরল রেখা মূল বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়।

৯। প্রমাণ কর যে (2, −1) এবং (5, 1) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যগামী সরল রেখা (8, 3) বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়।

১০। (1, 2) এবং (5, 4) এর মধ্যবিন্দু ও (2, 3) এবং (4, 7) এর মধ্য-বিন্দুর সংযোজক সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

১১। (a, b) এবং (a', b') এর মধ্যবিন্দু ও $(-a, b)$ এবং $(a', -b')$ এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

১২। একটি সরল রেখা (−5, 4) এর মধ্য দিয়া যায় এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যে তাহার ছেদিতাংশ এই বিন্দুর দ্বারা 1 : 2 এর অনুপাতে বিভক্ত হয়; সরল রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

১৩। একটি সরল রেখা অক্ষদ্বয়ের সহিত একটি সমকোণী ত্রিভুজ সৃষ্টি করে। যদি এই ত্রিভুজের অতিভুজ 13 এবং ক্ষেত্রফল 30 হয়, সরল রেখার মীকরণ নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1938.]

১৪। একটি ত্রিভুজের ভূমি এবং দুইটি ভুজের বর্গান্তর দেওয়া আছে; শীর্ষের সঞ্চার পথ নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1944.]

১৫। দুইটি সরল রেখার ছেদবিন্দু নির্ণয়ঃ

মনে কর সরল রেখা দুইটির সমীকরণ $a_1x+b_1y+c_1=o,$

এবং $a_2x+b_2y+c_2=o.$

মনে কর ইহাদের ছেদ বিন্দু (x_1, y_1); তাহা হইলে (x_1, y_1) উভয় সমীকরণকেই সিদ্ধ করিবে।

সুতরাং $a_1x_1+b_1y_1+c_1=o,$

এবং $a_2x_1+b_2y_1+c_2=o.$

বজ্রগুণন পদ্ধতি দ্বারা সমাধান করিলে,

$$\frac{x_1}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y_1}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

অতএব ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$.

অনুসিদ্ধান্ত : যদি সরল রেখা দুইটি সমান্তরাল হয়, তবে ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক অসীম হইবে।

সুতরাং $a_1b_2-a_2b_1=0$ অর্থাৎ $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ হইবে।

১৫। **তিনটি সরল রেখার সমবিন্দু হইবার সূত্র :**

(ক) মনে কর সরল রেখা তিনটির সমীকরণ $a_1x_1+b_1y+c_1=0$,
$a_2x+b_2y+c_2=0$,
এবং $a_3x+b_3y+c_3=0$.

প্রথম দুইটি সরল রেখার ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right).$$

যদি তৃতীয় সরল রেখাটি সমবিন্দু হয়, তবে উহাও এই ছেদ বিন্দুর মধ্য দিয়া যাইবে।

অতএব নির্ণেয় সূত্র $a_3\left(\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)+b_3\left(\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)+c_3=0.$

অর্থাৎ $a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0.$

(খ) যদি এমন তিনটি ধ্রুব রাশি p, q এবং r নির্ণয় করা সম্ভব হয় যে, $p(a_1x+b_1y+c_1)+q(a_2x+b_2y+c_2)+r(a_3x+b_3y+c_3)=0$ হয়, তবে সরল রেখা তিনটি সমবিন্দু।

কারণ তাহা হইলে,

$$a_3x+b_3y+c_3=-\frac{p}{r}(a_1x+b_1y+c_1)-\frac{q}{r}(a_2x+b_2y+c_2),$$

যাহার অর্থ এই যে, ডান দিকের দুইটি সরল রেখা $a_1x+b_1y+c_1=0$,

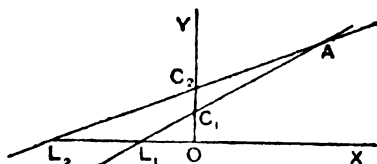
এবং $a_2x+b_2y+c_2=o$ এর ছেদ বিন্দু বাম দিকের সরল রেখা $a_3x+b_3y+c_3=o$ কেও সিদ্ধ করে। অতএব সরল রেখা তিনটি সমবিন্দু।

১৬। দুইটি প্রদত্ত সরল রেখার ছেদ বিন্দুর মধ্যগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয়ঃ

(ক) মনে কর-প্রদত্ত সরল রেখা দুইটির সমীকরণ $a_1x+b_1y+c_1=o$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=o.$

যদি ইহাদের ছেদ বিন্দু (x_1, y_1) হয়, তবে এই বিন্দুর মধ্যগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ হইবে $y-y_1=m(x-x_1)$, যেখানে m যে-কোন একটি ধ্রুব রাশি। m এর মান নির্ণয় করিতে হইলে আরও একটি সম্বন্ধের প্রয়োজন।

(খ) $(a_1x+b_1y+c_1)+k(a_2x+b_2y+c_2)=o$, যেখানে k যে-কোন একটি ধ্রুব রাশি, এমন একটি সমীকরণ যাহা $a_1x+b_1y+c_1=o$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=o$ সমীকরণ দুইটির সমাধান দ্বারা সিদ্ধ হয়। কিন্তু এই সমাধানই সরল রেখা দুইটির ছেদ বিন্দু। সুতরাং উপরি উক্ত সমীকরণটি ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হয়। পুনরায়, যেহেতু ইহা x এবং y এর একঘাত সমীকরণ, সুতরাং একটি সরল রেখাকে প্রকাশ করে। অতএব এই সমীকরণটি দুইটি প্রদত্ত সরল রেখার ছেদ বিন্দুর মধ্যগামী সরল রেখার সমীকরণ। k এর মান নির্ণয় করিতে হইলে আরও একটি সম্বন্ধের প্রয়োজন।

১৭। দুইটি প্রদত্ত সরল রেখার মধ্যস্থিত কোণ নির্ণয়ঃ

মনে কর দুইটি সরল রেখা AL_1 এবং AL_2 পরস্পরকে A বিন্দুতে এবং x-অক্ষকে যথাক্রমে L_1 এবং L_2 বিন্দুতে ছেদ করে।

(ক) মনে কর সরল রেখা দুইটির সমীকরণ $y=m_1x+c_1$, এবং $y=m_2x+c_2$.

তাহা হইলে $\tan AL_1X = m_1$ এবং $\tan AL_2X = m_2$.

এখন সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যস্থিত কোণ $L_1AL_2 = \angle AL_1X - \angle AL_2X$.

সুতরাং $\tan L_1AL_2 = \tan(AL_1X - AL_2X) =$

$$\frac{\tan AL_1X - \tan AL_2X}{1 + \tan AL_1X .\ \tan AL_2X} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}.$$

অতএব নির্ণেয় কোণ $L_1AL_2 = \tan^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$.

(খ) মনে কর সরল রেখা দুইটির সমীকরণ $a_1x + b_1y + c_1 = o$,

এবং $a_2x + b_2y + c_2 = o$.

ইহাদের ট্যাঞ্জেণ্ট রূপে লিখিলে,

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}, \text{ এবং } y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2}.$$

তাহা হইলে $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$, এবং $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$.

অতএব পূর্ব্বের মত নির্ণেয় কোণ $L_1AL_2 = \tan^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$

$$= \tan^{-1}\frac{\left(-\frac{a_1}{b_1}\right) - \left(-\frac{a_2}{b_2}\right)}{1 + \left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)} = \tan^{-1}\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}.$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

(১) যদি সরল রেখা দুইটি সমান্তরাল হয়, তবে তাহাদের মধ্যস্থিত কোণ $= o$; অর্থাৎ $\tan L_1AL_2 = o$.

অতএব (ক) হইতে পাওয়া যায় $m_1 = m_2$; এবং (খ) হইতে পাওয়া যায়

$b_1a_2 - a_1b_2 = o$ অর্থাৎ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

সুতরাং $ax+by+c=o$ সরল রেখাটির সমান্তরাল যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ হইবে $ax+by+d=o$, যেখানে d একটি ধ্রুব রাশি এবং c হইতে ভিন্ন। d এর মান নির্ণয় করিতে হইলে আরও একটি সম্বন্ধের প্রয়োজন।

(২) যদি একটি সরল রেখা অন্যটির উপর লম্ব হয়, তবে তাহাদের মধ্যস্থিত কোণ $=90°$; অর্থাৎ $tan\ L_1AL_2=\infty$.

অতএব (ক) হইতে পাওয়া যায় $1+m_1m_2=o$; এবং (খ) হইতে পাওয়া যায় $a_1a_2+b_1b_2=o$.

সুতরাং $ax+by+c=o$ সরল রেখাটির উপর লম্ব যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ হইবে $bx-ay+l=o$, যেখানে l একটি ধ্রুব রাশি এবং c হইতে ভিন্ন। l এর মান নির্ণয় করিতে হইলে আরও একটি সম্বন্ধের প্রয়োজন।

উদাহরণমালা

উদা ঃ ১। m এর মান কত হইলে $y=3x-1$, $2y=x+3$, এবং $3y=mx+4$ সরল রেখা তিনটি সমবিন্দু হইবে? [কঃ বিঃ 1940.]

$y=3x-1$, এবং $2y=x+3$, সমীকরণ দুইটির সমাধান করিলে $x=1$, $y=2$ হয়।

সুতরাং এই দুইটি সরল রেখার ছেদ বিন্দু $(1, 2)$.

সরল রেখা তিনটি সমবিন্দু হইবে, যদি এই বিন্দু $(1, 2)$, তৃতীয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

সুতরাং $6=m+4$.

অতএব $m=2$.

উদা ঃ ২। $(3, 2)$ এবং $3x+y-5=o$, ও $x+5y+3=o$, সরল রেখা দুইটির ছেদ বিন্দুর মধ্যগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, এবং ইহার দ্বারা অক্ষদ্বয়ের সহিত উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1942.]

$3x+y-5=o$, এবং $x+5y+3=o$, সমীকরণ দুইটির সমাধান করিলে $x=2$, $y=-1$ হয়।

সুতরাং এই দুইটি সরল রেখার ছেদ বিন্দু $(2, -1)$.

নির্ণেয় সরল রেখা $(3, 2)$ এবং $(2, -1)$ বিন্দু দুইটির মধ্যগামী।

অতএব ইহার সমীকরণ $\dfrac{y-2}{2-(-1)}=\dfrac{x-3}{3-2}$,

অর্থাৎ $y=3x-7$.

ছেদিতাংশ রূপে লিখিলে $\dfrac{x}{\frac{7}{3}}+\dfrac{y}{-7}=1$.

সুতরাং এই সরল রেখা অক্ষের উপর যে দুইটি অংশ ছেদ করে তাহাদের মান $\frac{7}{3}$ এবং -7

অতএব নির্ণেয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{3}\cdot 7=\frac{49}{6}=8\frac{1}{6}$ বর্গ একক।

বিকল্প পদ্ধতি :

$3x+x-5=o$ এবং $x+5y+3=o$ সরল রেখা দুইটির ছেদ বিন্দুর মধ্যগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ $3x+y-5+k(x+5y+3)=o$.

এই সরল রেখা $(3, 2)$ বিন্দুর মধ্য দিয়া যায় ;

সুতরাং $9+2-5+k(3+10+3)=o$, অর্থাৎ $k=-\frac{3}{8}$.

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ $(3x+y-5)-\frac{3}{8}(x+5y+3)=o$,

অর্থাৎ $3x-y-7=o$.

উদা : ৩। $4x-3y+1=o$, সরল রেখার সমান্তরাল এবং $(3, 5)$ বিন্দুর মধ্যগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1947.]

$4x-3y+1=o$ সরল রেখার সমান্তরাল যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ $4x-3y+c=o$,

ইহা $(3, 5)$ বিন্দুর মধ্যগামী ; সুতরাং $12-15+c=o$ অর্থাৎ $c=3$.

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ $4x-3y+3=o$.

উদা : ৪। $3x+4y=17$, সরল রেখার উপর লম্ব এবং $(4, -5)$ বিন্দুর মধ্যগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$3x+4y=17$, সরল রেখার উপর লম্ব যে কোন সরল রেখার সমীকরণ $4x-3y=c$.

ইহা $(4, -5)$ বিন্দুর মধ্যগামী ; সুতরাং $16+15=c$, অর্থাৎ $c=31$.

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ $4x-3y=31$.

উদা : ৫। একটি সরল রেখা $x-2y-a=o$ এবং $x+3y-2a=o$ সরল রেখা দুইটির ছেদ বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়, এবং $3x+4y=o$ সরল রেখার সমান্তরাল ; ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$x-2y-a=o$, এবং $x+3y-2a=o$, সমীকরণ দুইটির সমাধান করিলে $x=\frac{7a}{5}$, $y=\frac{a}{5}$ হয়। সুতরাং ইহাদের ছেদ বিন্দু $\left(\frac{7a}{5}, \frac{a}{5}\right)$.

$3x+4y=o$ সরল রেখার সমান্তরাল যে কোন সরল রেখার সমীকরণ $3x+4y=c$.

ইহা $\left(\frac{7a}{5}, \frac{a}{5}\right)$ বিন্দুটির মধ্যগামী, সুতরাং $\frac{21a}{5}+\frac{4a}{5}=c$, অর্থাৎ $c=5a$.

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ $3x+4y=5a$.

বিকল্প পদ্ধতি :

$x-2y-a=o$ এবং $x+3y-2a=o$ সরল রেখা দুইটির ছেদ বিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ $(x-2y-a)+k(x+3y-2a)=o$,

অর্থাৎ $(1+k)\,x+(-2+3k)\,y-a(1+2k)=o$.

যেহেতু ইহা $3x+4y=o$ সরল রেখার সমান্তরাল,

সুতরাং $\frac{1+k}{3}=\frac{-2+3k}{4}$,

অর্থাৎ $k=2$.

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ $3x+4y-5a=o$.

উদা : ৬ । একটি সরল রেখা $x+2y+3=o$ এবং $3x+4y+7=o$ সরল রেখা দুইটির ছেদ বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়, এবং $y-x=8$, সরল রেখার উপর লম্ব ; ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$x+2y+3=o$, এবং $3x+4y+7=o$, সমীকরণ দুইটির সমাধান করিলে $x=-1$, $y=-1$ হয়।

সুতরাং ইহাদের ছেদ বিন্দু $(-1,-1)$.

$y-x=8$, সরল রেখার উপর লম্ব যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ $x+y=c$.

যেহেতু ইহা $(-1,-1)$ বিন্দুটির মধ্যগামী সুতরাং $-1-1=c$, অর্থাৎ $c=-2$.

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ $x+y+2=o$.

বিকল্প পদ্ধতি :

$x+2y+3=o$, এবং $3x+4y+7=o$, সরল রেখা দুইটির ছেদ বিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ $(x+2y+3)+k(3x+4y+7)=o$,

অর্থাৎ $(1+3k)x+(2+4k)y+(3+7k)=o$

যেহেতু ইহা $y-x=8$ সরল রেখার উপর লম্ব,

সুতরাং $(2+4k).\ 1+(1+3k)(-1)=o$ অর্থাৎ $k=-1$.

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ $-2x-2y-4=o$, অর্থাৎ $x+y+2=o$.

প্রশ্নমালা

১। নিম্নলিখিত সরল রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু এবং তাহাদের মধ্যস্থিত কোণ নির্ণয় কর :

(ক) $y=5x-7$, এবং $4x-3y+1=o$;

(খ) $x+5y+3=o$, এবং $5x-2y=12$;

(গ) $2x-3y+5=o$, এবং $7x+4y=3$;

(ঘ) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, এবং $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$;

(ঙ) $y=m_1x+\frac{a}{m_1}$, এবং $y=m_2x+\frac{a}{m_2}$;

(চ) $\frac{x}{a}\cos\alpha+\frac{y}{b}\sin\alpha=1$, এবং $\frac{x}{a}\cos\beta+\frac{y}{b}\sin\beta=1$;

(ছ) $ax-by+c=o$, এবং $(a-b)x-(a+b)y+c=o$.

২। প্রমাণ কর যে নিম্নলিখিত সরল রেখাত্রয় সমবিন্দু :

(ক) $y=6-5x$, $3x-2y=1$, এবং $x-3y+2=0$;

(খ) $2x-y-1=0$, $2y-x-1=0$, এবং $17x-3y-14=0$;

(গ) $y-x+1=0$, $2y-x-1=0$, এবং $y-7x+19=0$;

(ঘ) $x+3y+1=0$, $2x+7y+3=0$, এবং $5x-y=11$;

(ঙ) $3x+4y+6=0$, $6x+5y+9=0$, এবং $3x+3y+5=0$;

(চ) $5x+3y-7=0$, $3x-4y-10=0$, এবং $x+2y=0$.

৩। $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$, এবং $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$, সরল রেখা দুইটির ছেদ বিন্দু নির্ণয় কর ; এবং এই বিন্দুগামী এবং উভয় অক্ষের উপর 45° কোণে নত একটি সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1941.]

৪। (1, 2) এবং $x+3y+1=0$, ও $2x+7y+3=0$ সরল রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর মধ্যগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1946.]

৫। $4x-3y=10$, সরল রেখার সমান্তরাল এবং (2, 3) বিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৬। $x+2y+3=0$, সরল রেখার উপর লম্ব এবং (4. −3) বিন্দুর মধ্যগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৭। (1. 3) এবং (2, 7) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যগামী সরল রেখার সমান্তরাল এবং (3, 4) বিন্দুর মধ্যগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৮। $(5, 7)$ এবং $(-6, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যগামী সরল রেখার উপর লম্ব এবং $(2, -3)$ বিন্দুর মধ্যগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৯। $2x+3y=7$ সরল রেখার সমান্তরাল এবং $3x+y=5$ এবং $2y-5x+1=0$ সরল রেখা দুইটির ছেদ বিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

১০। $3x-y=0$, সরল রেখার উপর লম্ব এবং $x+2y=0$, ও $y+4x+7=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

১১। $6x-7y+8=0$, সরল রেখার উপর লম্ব এবং $2x+3y+4=0$, ও $3x+4y-5=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

১২। এমন সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $Ax+By+C=0$ এবং $A'x+B'y+C'=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়, এবং

(ক) মূল বিন্দুর মধ্যগামী হয় ;

(খ) y-অক্ষের সমান্তরাল হয় ;

(গ) y-অক্ষের উপর a অংশ ছেদ করে ;

(ঘ) (x', y') বিন্দুর মধ্য দিয়া যায় ;

(ঙ) $A''x+B''y+C''=0$ সরল রেখার সমান্তরাল হয়।

১৩। যদি $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, সরল রেখা $2x-y=1$ এবং $3x-4y+6=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী হয় এবং $4x+3y-6=0$, সরল রেখার সমান্তরাল হয়, তবে a এবং b এর মান নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1948.]

১৪। একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত এবং তাহাদের দৈর্ঘ্য 2 একক ; বর্গক্ষেত্রের চারিটি ভুজের সমীকরণ নির্ণয় কর।

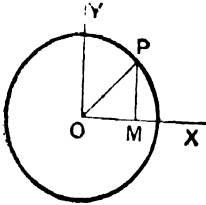
[কঃ বিঃ 1950.]

তৃতীয় অধ্যায়

বৃত্ত (The Circle)

১৮। যদি একটি বিন্দু যে-কোন সমতলের উপর এমন ভাবে নড়িয়া বেড়ায় যে, সেই সমতলস্থ কোন একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে তাহার দূরত্ব সর্ব্বদাই প্রদত্ত নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান থাকে, তবে বিন্দুর সঞ্চার পথকে **বৃত্ত** (circle) বলে। নির্দ্দিষ্ট বিন্দুকে বৃত্তের **কেন্দ্র** (centre) এবং নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যকে বৃত্তের **ব্যাসার্দ্ধ** (radius) বলা হয়।

১৯। **বৃত্তের কেন্দ্র মূল-বিন্দু এবং ব্যাসার্দ্ধ** $=a$; **ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর।**

মনে কর P সঞ্চার পথ অর্থাৎ পরিধির উপর যে-কোন একটি বিন্দু, যাহার স্থানাঙ্ক (x, y).

P বিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর PM লম্ব টানিলে, $x=$ OM, এবং $y=$ PM. OP যোগ কর। তবে PMO একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

স্থতরাং $\quad OM^2+MP^2=OP^2$

অর্থাৎ $\quad x^2+y^2=OP^2$.

কিন্তু OP বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ $=a$.

অতএব বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2=a^2$.

এই বৃত্তস্থ প্রত্যেক বিন্দুর স্থানাঙ্ক এই সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে; এবং অন্য কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক ইহাকে সিদ্ধ করিবে না।

২০। **বৃত্তের কেন্দ্র যে-কোন একটি বিন্দু** (h, k), **এবং ব্যাসার্দ্ধ** $=a$; **ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর।**

মনে কর C বৃত্তের কেন্দ্র যাহার স্থানাঙ্ক (h, k), এবং P সঞ্চার পথ অর্থাৎ পরিধির উপর যে-কোন একটি বিন্দু, যাহার স্থানাঙ্ক (x, y). C এবং P হইতে

x-অক্ষের উপর যথাক্রমে CM এবং PN লম্ব টান। C হইতে PN এর উপর CL লম্ব টান এবং CP যোগ কর।

ON $= x$ এবং OM $= h$;

সুতরাং NM $=$ CL $= x - h$.

PN $= y$ এবং CM $=$ LN $= k$;

সুতরাং PL $= y - k$.

এবং CP বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ $= a$.

এখন PLC সমকোণী ত্রিভুজ, সুতরাং $CL^2 + PL^2 = CP^2$

অর্থাৎ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$.

এই বৃত্তস্থ প্রত্যেক বিন্দুর স্থানাঙ্ক এই সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে; এবং অন্য কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক ইহাকে সিদ্ধ করিবে না।

অতএব বৃত্তের সমীকরণ, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$.

২১। বৃত্তের সমীকরণের সাধারণ রূপ ঃ

যে-কোন একটি বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$;

অর্থাৎ $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = a^2$,

অথবা $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - a^2 = 0$.

এই বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) এবং ব্যাসার্দ্ধ $= a$.

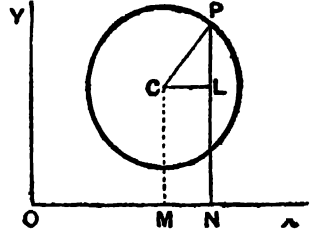
এই সমীকরণের দুইটি বৈশিষ্ঠ লক্ষণীয়।

(ক) x^2 এবং y^2 এর সহগ সমান, এবং

(খ) xy বিশিষ্ট কোন পদ নাই।

সুতরাং বৃত্তের সমীকরণের সাধারণ রূপ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.

x^2 এবং y^2 এর যদি কোন সহগ থাকে, তবে সমগ্র সমীকরণকে সেই সহগ দ্বারা ভাগ করিয়া লইলেই উভয়ের সহগ 1 হইয়া যাইবে।

আরও লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, সমীকরণে প্রকৃত পক্ষে তিনটি ধ্রুব রাশি আছে; সুতরাং কোন বৃত্ত নির্দ্দেশ করিতে হইলে তিনটি সম্পর্কের প্রয়োজন।

২২। বৃত্তের সমীকরণের সাধারণ রূপ দেওয়া আছে; তাহার কেন্দ্র ও ব্যাসার্দ্ধ নির্ণয় কর।

মনে কর বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$

অর্থাৎ $(x^2+2gx+g^2)+(y^2+2fy+f^2)=g^2+f^2-c$

অথবা $(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$

সুতরাং ইহার কেন্দ্র $(-g, -f)$, এবং ব্যাসার্দ্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}.$

যদি $g^2+f^2>c$, তবে ব্যাসার্দ্ধ বাস্তব, সুতরাং বৃত্ত বাস্তব হইবে।

যদি $g^2+f^2=c$, তবে ব্যাসার্দ্ধ $=0$, সুতরাং বৃত্ত বিন্দুতে পরিণত হয় এবং সেই বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র। এই ধরণের বৃত্তকে **বিন্দু-বৃত্ত** (point circle) বলে।

যদি $g^2+f^2<c$, তবে ব্যাসার্দ্ধ কাল্পনিক হইয়া যায়। সুতরাং সমীকরণের লেখ কাল্পনিক, অর্থাৎ কোন সঞ্চার পথ আঁকা যায় না। এক্ষেত্রে বৃত্তের কোন অস্তিত্ব নাই বলা চলে বটে, কিন্তু তাহা না বলিয়া, "ঐ সঞ্চার পথ এমন একটি বৃত্ত যাহার কেন্দ্র বাস্তব কিন্তু ব্যাসার্দ্ধ কাল্পনিক" বলাই ভাল।

২৩। বৃত্তের স্পর্শক ঃ

বৃত্তের স্পর্শকের দুইটি সংজ্ঞা দেওয়া যায়; (ক) স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্দ্ধের উপর লম্ব সরল রেখা; (খ) স্পর্শক এমন একটি সরল রেখা, যাহা বৃত্তকে দুইটি সমাপাতী বিন্দুতে ছেদ করে। এইবার এই দুইটি সংজ্ঞার সাহায্যে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করা হইবে।

২৪। $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তস্থ (x', y') বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ক) (x', y') বিন্দুর মধ্যগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ

$$y-y'=m(x-x').$$

(x', y') এবং বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$ সংযোগকারী সরল রেখার সমীকরণ

$$\frac{y}{y'}=\frac{x}{x'};\ \text{অর্থাৎ}\ y=\frac{y'}{x'}x.$$

এই সরল রেখা দুইটি পরস্পরের উপর লম্ব, সুতরাং $1+m.\frac{y'}{x'}=0$,

$$\text{অর্থাৎ} \quad m=-\frac{x'}{y'}.$$

m এর এই মান বসাইলে, $y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x')$

$$\text{অর্থাৎ} \quad xx'+yy'=x'^2+y'^2.$$

কিন্তু (x', y') বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত ; সুতরাং $x'^2+y'^2=a^2$.

অতএব স্পর্শকের সমীকরণ $xx'+yy'=a^2$.

(খ) বৃত্তের উপর দুইটি বিন্দু P, Q লও, যাহাদের স্থানাঙ্ক (x', y') এবং (x'', y'').

তবে PQ সরল রেখার সমীকরণ $\frac{y-y'}{y'-y''}=\frac{x-x'}{x'-x''}$.

যেহেতু P এবং Q বিন্দু দুইটি বৃত্তস্থ,

সুতরাং $x'^2+y'^2=a^2$, এবং $x''^2+y''^2=a^2$,

অর্থাৎ $\quad y'^2-y''^2=-(x'^2-x''^2)$.

$$\therefore \quad \frac{y-y'}{y'-y''}\times(y'^2-y''^2)=-\frac{x-x'}{x'-x''}\times(x'^2-x''^2)$$

অথবা $\quad (y-y')(y'+y'')=-(x-x')(x'+x'')$

যখন Q ক্রমশঃ P বিন্দুর সন্নিকটস্থ হইয়া অবশেষে P বিন্দুর সহিত এক হইয়া যাইবে, অর্থাৎ $x'=x''$ এবং $y'=y''$ হইবে ;

তখন ছেদক PQ চরম অবস্থায় বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

সুতরাং স্পর্শকের সমীকরণ হইবে $\quad (y-y')y'=-(x-x')x'$

অথবা $\quad yy'-y'^2=-xx'+x'^2$

অর্থাৎ $\quad xx'+yy'=x'^2+y'^2$.

কিন্তু (x', y) বৃত্তস্থ বিন্দু বলিয়া $\quad x'^2+y'^2=a^2$.

অতএব বৃত্তের (x', y') বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ

$$xx'+yy'=a^2.$$

টীকা ঃ যদি সরল রেখা $y=mx+c$ এই বৃত্তের স্পর্শক হয় তবে $y=mx+c$ এবং (x', y') এর কোন বিশেষ মানের জন্য $xx+yy'=a^2$ অভিন্ন হইবে।

স্নুতরাং $\dfrac{x'}{m}=\dfrac{y'}{-1}=\dfrac{a^2}{-c}$.

অর্থাৎ $y'=\dfrac{a^2}{c}$ এবং $x'=-\dfrac{ma^2}{c}$.

কিন্তু (x', y') বৃত্তস্থ বলিয়া $x'^2+y'^2=a^2$

স্নুতরাং $\dfrac{m^2a^4}{c^2}+\dfrac{a^4}{c^2}=a^2$, অর্থাৎ $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$.

অতএব $y=mx+c$ সরল রেখাটি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে, যদি $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$ হয় ; এবং স্পর্শ বিন্দু হইবে $\left(-\dfrac{ma^2}{c}, \dfrac{a^2}{c}\right)$.:

২৫। একটি সরল রেখা ও বৃত্তের ছেদ ঃ

মনে কর $y=mx+c$ একটি সরল রেখা। ইহা $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তকে কোন কোন বিন্দুতে ছেদ করিতেছে নির্ণয় করিতে হইলে এই দুইটি সহ সমীকরণের সমাধান করিতে হয়। স্নুতরাং y এর পরিবর্তে $mx+c$ বসাইলে,

$$x^2+(mx+c)^2=a^2$$

অর্থাৎ $x^2(1+m^2)+2mcx+c^2-a^2=0.$

ইহা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ; স্নুতরাং x এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে। $y=mx+c$ তে এই মান দুইটি বসাইলে y এরও দুইটি মান পাওয়া যাইবে। অতএব একটি সরল রেখা সাধারণতঃ একটি বৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে কর x এর দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে x_1 এবং x_2 দুইটি সমাধান পাওয়া যায়।

তবে, $x_1+x_2=-\dfrac{2mc}{1+m^2}$; এবং $x_1x_2=\dfrac{c^2-a^2}{1+m^2}$

স্থতরাং $x_1-x_2=\sqrt{\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\}}$

$$=\frac{2}{1+m^2}\sqrt{a^2(1+m^2)-c^2}.$$

যদি ছেদ বিন্দুদ্বয় (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) হয়, তবে

$$y_1-y_2=(mx_1+c)-(mx_2+c)=m(x_1-x_2).$$

অতএব বৃত্তের মধ্যস্থিত সরল রেখার ছেদিতাংশ

$$=\sqrt{\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\}}$$
$$=\sqrt{1+m^2}(x_1-x_2)$$
$$=2\sqrt{\left\{\frac{a^2(1+m^2)-c^2}{1+m^2}\right\}}.$$

যদি এই সরল রেখা স্পর্শক হয়, তবে ছেদ বিন্দু দুইটির সমাপতন ঘটিবে। অর্থাৎ x এর দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে x এর যে দুইটি মান পাওয়া যাইবে, তাহা অভিন্ন হইবে।

স্থতরাং $4m^2c^2=4(1+m^2)(c^2-a^2)$

অর্থাৎ $a^2(1+m_2)=c^2.$

অথবা $c=\pm a\sqrt{1+m^2}.$

অতএব $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$ হইলে $y=mx+c$ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

স্থতরাং বৃত্তের স্পর্শকের সাধারণ রূপ হইল, $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2},$

যেখানে m যে-কোন ধ্রুব রাশি।

টীকা : ছেদক যদি স্পর্শক হইয়া দাঁড়ায়, তবে ছেদিতাংশ $=0$

$\therefore\ a^2(1+m^2)=c^2$

অর্থাৎ $c=\pm a\sqrt{1+m^2}.$

উদাহরণমালা

উদা : ১। একটি বৃত্তের কেন্দ্র (2, 3) এবং ইহা (5, 7) বিন্দুর মধ্য দিয়া যায় ; ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1937.]

বৃত্তের কেন্দ্র (2, 3), সুতরাং ইহার সমীকরণ

$$(x-2)^2+(y-3)^2=a^2.$$

বৃত্ত (5, 7) বিন্দুগামী, সুতরাং

$$(5-2)^2+(7-3)^2=a^2, \quad \text{অর্থাৎ } a^2=25.$$

অতএব বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ $(x-2)^2+(y-3)^2=25,$

অর্থাৎ $x^2+y^2-4x-6y-12=0.$

উদা : ২। প্রমাণ কর যে $y-3x=10$ সরল রেখা $x^2+y^2=10$ বৃত্তকে দুইটি সমাপাতী বিন্দুতে ছেদ করে, এবং এই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1943.]

ছেদ বিন্দু নির্ণয় করা মানে দুইটি সহ সমীকরণের সমাধান করা।

$y-3x=10,$ অর্থাৎ $y=3x+10.$

সুতরাং $x^2+(3x+10)^2=10$

অথবা $x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0$

$\therefore \ x=-3, -3$

এবং $y=1, 1.$

দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক একই, অর্থাৎ ছেদ বিন্দুদ্বয় সমাপাতী এবং তাহার স্থানাঙ্ক $(-3, 1)$.

উদা : ৩। একটি বৃত্তের কেন্দ্র $2y-3y=0$ সরল রেখার উপর অবস্থিত এবং ইহা (4, 3) এবং (−2, 5) বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া যায় ; ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1950.]

যদি বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) এবং ব্যাসার্দ্ধ $=a$ হয়, তবে ইহার সমীকরণ

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2.$$

এই বৃত্ত (4, 3) এবং (−2, 5) বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া যায়,

সুতরাং $(4-h)^2+(3-k)^2=a^2$

এবং $(-2-h)^2+(5-k)^2=a^2$

অর্থাৎ $(4-h)^2+(3-k)^2=(-2-h)^2+(5-k)^2$

অথবা $3h-4k+1=0$.

আবার যেহেতু (h, k) কেন্দ্র $2x-3y=0$ সরল রেখার উপর অবস্থিত,

সুতরাং $2h-3k=0$.

সমাধান করিলে $h=-3, k=-2$.

সুতরাং $(4+3)^2+(3+2)^2=a^2$, অর্থাৎ $a^2=74$.

অতএব বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ $(x+3)^2+(y+2)^2=74$,

অর্থাৎ $x^2+y^2+6x+4y-61=0$.

উদা: ৪। $3x^2+3y^2-5x-6y+4=0$ বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্দ্ধ নির্ণয় কর।

$3x^2+3y^2-5x-6y+4=0$ সমীকরণকে 3 দিয়া ভাগ করিলে $x^2+y^2-\frac{5}{3}x-2y+\frac{4}{3}=0$, পাওয়া যায়।

ইহাকে এই ভাবে লেখা যায়,

$$(x-\tfrac{5}{6})^2+(y-1)^2=\tfrac{13}{36}.$$

অতএব বৃত্তের কেন্দ্র $(\frac{5}{6}, 1)$ এবং ব্যাসার্দ্ধ$=\frac{1}{6}\sqrt{13}$.

প্রশ্নমালা ৩

১। এমন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহার

(ক) কেন্দ্র $(-3, 2)$ এবং ব্যাসার্দ্ধ$=4$.

(খ) কেন্দ্র $(-5, -6)$ এবং ব্যাসার্দ্ধ$=10$.

(গ) কেন্দ্র (a, b) এবং ব্যাসার্দ্ধ$=\sqrt{a^2+b^2}$.

(ঘ) কেন্দ্র $(a, -b)$ এবং ব্যাসার্দ্ধ$=a+b$.

(ঙ) কেন্দ্র (g, f) এবং ব্যাসার্দ্ধ$=\sqrt{g^2+f^2-c}$.

২। নিম্নলিখিত বৃত্তসমূহের কেন্দ্র ও ব্যাসার্দ্ধ নির্ণয় কর :

(ক) $x^2+y^2-4x-2y-11=0$.

(খ) $x^2+y^2+2ax+2by=0$.

(গ) $x^2+y^2=k(x+k)$.

(ঘ) $\sqrt{1+m^2}(x^2+y^2)=2c(x+my)$.

(ঙ) $5x^2+5y^2=2x+3y$.

৩। এমন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহা বিন্দুত্রয়

(ক) $(0, 2), (2, 0)$ এবং $(2, 2)$ এর মধ্যগামী।

(খ) $(o, o), (a, o)$ এবং (o, b) এর মধ্যগামী।

(গ) $(1, 2), (3, 4)$ এবং $(3, 2)$ এর মধ্যগামী।

(ঘ) $(1, 1), (5, -5)$ এবং $(6, -4)$ এর মধ্যগামী।

(ঙ) $(a, b), (a, -b)$ এবং $(a+b, a-b)$ এর মধ্যগামী।

৪। একটি বৃত্তের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং ইহা (o, a) এবং (b, h) বিন্দু দুইটির মধ্য দিয়া যায়; বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫। একটি বৃত্তের কেন্দ্র $3x+4y=7$ সরল রেখার উপর অবস্থিত এবং ইহা $(1, -2)$ এবং $(4, -3)$ বিন্দু দুইটির মধ্য দিয়া যায়; বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৬। এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা অক্ষ দুইটি হইতে 3 এবং 4 এর সমান অংশ ছেদ করে এবং মূল বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়।

৭। এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা অক্ষ দুইটি হইতে a এবং b এর সমান অংশ ছেদ করে এবং মূল বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়।

৮। এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা অক্ষ দুইটি হইতে 5 এবং 2 এর সমান অংশ ছেদ করে এবং যাহার কেন্দ্র সরল রেখা $2x-y=6$ এর উপর অবস্থিত।

৯। এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার কেন্দ্র মূল বিন্দু এবং যাহা $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$ সরল রেখাকে y–অক্ষের উপর ছেদ করে। [কঃ বিঃ 1940.]

১০। $x^2+y^2=169$ বৃত্তের সহিত $x+y=17$ সরল রেখার ছেদ বিন্দু নির্ণয় কর।

১১। এমন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহা

(ক) উভয় অক্ষকে a দূরত্বে স্পর্শ করে ;

(খ) উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং যাহার ব্যাসার্দ্ধ $=a$;

(গ) উভয় অক্ষকে স্পর্শ. করে এবং (a,b) বিন্দুর মধ্য দিয়া যায় ;

(ঘ) y-অক্ষকে মূল বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (a, b) বিন্দুর মধ্য দিয়া যায় ;

(ঙ) x-অক্ষকে মূল বিন্দু হইতে a দূরত্বে স্পর্শ করে এবং y–অক্ষের উপর 6 এর সমান অংশ ছেদ করে।

১২। প্রমাণ কর যে, $y=x+c\sqrt{2}$ সরল রেখাটি $x^2+y^2=c^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে, এবং স্পর্শ বিন্দু নির্ণয় কর।

১৩। $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের এমন স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহা

(ক) $y=mx+c$ সরল রেখার সমান্তরাল ;

(খ) $y=mx+c$ সরল রেখার উপর লম্ব ;

(গ) (b, c) বিন্দুর মধ্য দিয়া যায় ;

(ঘ) উভয় অক্ষের উপর সমভাবে নত।

১৪। এমন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহা

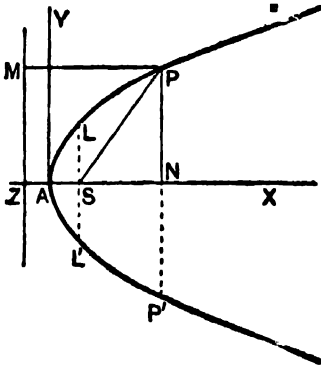
(ক) $5x+12y=1$ সরল রেখাকে স্পর্শ করে এবং যাহার কেন্দ্র $(3, 4)$;

(খ) উভয় অক্ষকে এবং $x+y=7$ সরল রেখাকে স্পর্শ করে।

১৫। (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকে ব্যাস ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

চতুর্থ অধ্যায়

অধিবৃত্ত (The Parabola.)

২৬। যদি কোন সমতলের উপর একটি বিন্দু এমন ভাবে নড়িয়া বেড়ায় যে সমতলস্থ একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু ও একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা হইতে তাহার দূরত্ব সমান থাকে তবে চলমান বিন্দুটির সঞ্চার পথকে **অধিবৃত্ত** (parabola) বলা হয়। নির্দ্দিষ্ট বিন্দুকে অধিবৃত্তের **নাভি** (focus), এবং নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে অধিবৃত্তের **নিয়ামক** (directrix) বলা হয়। নাভির মধ্য দিয়া নিয়ামকের উপর লম্ব সরল রেখাকে অধিবৃত্তের **অক্ষ** (axis) বলে।

২৭। **অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়ঃ**

মনে কর S অধিবৃত্তের নাভি, ZM নিয়ামক এবং ZS অক্ষ। ZSকে A বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। যেহেতু AZ = AS, সুতরাং A অধিবৃত্তস্থ বিন্দু। A বিন্দুকে অধিবৃত্তের শীর্ষ বলা হয়।

ZS কে X পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর এবং A বিন্দুর মধ্য দিয়া অক্ষের উপর AY লম্ব টান। A কে মূল বিন্দু এবং AX ও AY কে যথাক্রমে x এবং y অক্ষ মনে কর।

ZA অথবা AS দূরত্বকে সাধারণতঃ a বলা হয়।

মনে কর P বক্রস্থ যে কোন একটি বিন্দু। P হইতে x – অক্ষের উপর PN এবং নিয়ামকের উপর PM লম্ব টান। PS যোগ কর।

যদি P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হয়, তবে AN $= x$ এবং PN $= y$.

এখন যেহেতু P বিন্দু অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত, সুতরাং SP = PM,

অর্থাৎ $SP^2 = PM^2 = ZN^2$

PNS সমকোণী ত্রিভুজে, $PN^2+SN^2=PS^2=(ZA+AN)^2$

$\therefore \quad PN^2=(AS+AN)^2-(AN-AS)^2$

অর্থাৎ $y^2=(a+x)^2-(x-a)^2=4ax.$

অবিৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক এই সমীকরণকে সিদ্ধ করে এবং বক্রস্থ বিন্দু ব্যতীত অন্য কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক এই সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

অতএব অধিবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ $y^2=4ax$.

জ্যামিতির অনুরূপ সিদ্ধান্ত, $PN^2=4AS.AN.$

নাভি S এর স্থানাঙ্ক (a, o), কারণ $AS=a$.

যদি LSL′ অধিবৃত্তের নাভি লম্ব হয় তবে L বিন্দুর স্থানাঙ্ক (AS, SL).

যেহেতু L অধিবৃত্তস্থ বিন্দু সুতরাং

অর্থাৎ $\quad SL^2=4a^2$

সুতরাং $\quad SL=2a.$

অতএব নাভিলম্ব $LL'=4^{*}.$

জ্যামিতির অনুরূপ সিদ্ধান্ত, $LL'=4AS.$

যেহেতু, $y^2=4ax$; অর্থাৎ $y=\pm 2\sqrt{ax}$, সুতরাং x এর যে কোন মানের জন্য y এর দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত মান পাওয়া যায়। অর্থাৎ অক্ষের উপর যে-কোন বিন্দু N এর মধ্য দিয়া PNP′ লম্ব টানিলে অধিবৃত্তকে যদি দুইটি বিন্দু P এবং P′এ ছেদ করে, তবে PN=P′N, কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

জ্যামিতির অনুরূপ সিদ্ধান্ত, অধিবৃত্ত অক্ষের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুর নাভিগ দূরত্ব $PS=PM=ZN=ZA+AN$ $=a+x$.

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $y^2=kx$ অধিবৃত্তের সমীকরণ হয়, তবে নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য k এবং নাভির স্থানাঙ্ক $(\frac{1}{4}k, 0)$; অর্থাৎ সমীকরণের এক পক্ষে কেবল মাত্র y^2 থাকিলে, অপর পক্ষের x এর সহগ নাভিলম্বের সমান ; নাভির ভুজ এই সহগের চতুর্থাংশ, এবং কোটি $=0$.

২৮। যদি অক্ষ এবং AY কে স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় না ধরিয়া অক্ষ এবং **নিয়ামককে** x এবং y অক্ষ ধরা হয়, তবে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে,

$$(x-2a)^2+y^2=x^2$$

অর্থাৎ $$y^2=4a(x-a).$$

এক্ষেত্রে নাভি লম্ব $=4a$, এবং নাভির স্থানাঙ্ক $(2a, 0)$.

২৯। **অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়ঃ**

মনে কর অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$, এবং অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x', y').

P এর কাছে অধিবৃত্তের উপর আর একটি বিন্দু Q লও, যাহার স্থানাঙ্ক (x'', y'').

ছেদক PQ এর সমীকরণ, $\dfrac{y-y'}{y'-y''}=\dfrac{x-x'}{x'-x''}$.

যেহেতু (x', y') এবং (x'', y'') অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত, সুতরাং

$$y'^2=4ax', \text{ এবং } y''^2=4ax'',$$

অর্থাৎ $$y'^2-y''^2=4a(x'-x'').$$

$$\therefore \quad \frac{y-y'}{y'-y''}\times(y'^2-y''^2)=\frac{x-x'}{x'-x''}\times 4a(x'-x'')$$

অথবা $(y-y')(y'+y'')=4a(x-x')$.

যখন Q ক্রমশঃ P বিন্দুর সন্নিকটস্থ হইয়া অবশেষে P বিন্দুর সহিত এক হইয়া যাইবে, অর্থাৎ $x'=x''$ এবং $y'=y''$ হইবে,

তখন ছেদক PQ চরম অবস্থায় অধিবৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

সুতরাং স্পর্শকের সমীকরণ হইবে $yy'-y'^2=2a(x-x')$.

কিন্তু $\quad y'^2=4ax'$,

সুতরাং $\quad yy'=4ax'+2ax-2ax'=2a(x+x')$.

অতএব অধিবৃত্তের (x', y') বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ

$$yy' = 2a(x + x').$$

টীকা : যদি সরল রেখা $y = mx + c$, এই অধিবৃত্তের স্পর্শক হয়, তবে $y = mx + c$ এবং (x', y') এর কোন বিশেষ মানের জন্য $yy' = 2a(x + x')$ অভিন্ন হইবে।

সুতরাং $\quad \frac{y'}{1} = \frac{2a}{m} = \frac{2ax'}{c}$

অর্থাৎ $\quad x' = \frac{c}{m}$, এবং $y' = \frac{2a}{m}$.

কিন্তু (x', y') অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত ; সুতরাং $\frac{4a^2}{m^2} = 4a\frac{c}{m}$;

অর্থাৎ $\quad c = \frac{a}{m}$.

অতএব $y = mx + c$ সরল রেখা $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিবে, যদি $c = \frac{a}{m}$ হয় ; এবং স্পর্শ বিন্দু হইবে $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$.

সুতরাং $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সাধারণ সমীকরণ $y = mx + \frac{a}{m}$.

৩০। একটি সরল রেখা ও অধিবৃত্তের ছেদ :

মনে কর $y = mx + c$ একটি সরল রেখা। ইহা $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তকে কোন কোন বিন্দুতে ছেদ করিতেছে নির্ণয় করিতে হইলে এই দুইটি সহসমীকরণের সমাধান করিতে হয়। সুতরাং y এর পরিবর্তে $mx + c$ বসাইলে,

$$(mx + c)^2 = 4ax$$

অর্থাৎ $\quad m^2x^2 + 2x(mc - 2a) + c^2 = 0.$

ইহা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ; সুতরাং x এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে। $y = mx + c$ তে এই মান দুইটি বসাইলে y এরও দুইটি মান পাওয়া যাইবে।

অতএব একটি সরল রেখা সাধারণতঃ একটি অধিবৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে কর x এর দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে x_1 এবং x_2 দুইটি সমাধান পাওয়া যায়।

তবে, $x_1+x_2=-\frac{2(mc-2a)}{m_2}$, এবং $x_1x_2=\frac{c^2}{m^2}$;

সুতরাং $x_1-x_2=\sqrt{\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\}}=\frac{4}{m^2}\sqrt{a(a-mc)}$.

যদি ছেদ বিন্দুদ্বয় (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) হয়, তবে

$y_1-y_2=(mx_1+c)-(mx_2+c)=m(x_1-x_2)$

অতএব অধিবৃত্তের মধ্যস্থিত সরল রেখার ছেদিতাংশ

$$=\sqrt{\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\}}$$
$$=\sqrt{1+m^2}\,(x_1-x_2)$$
$$=\frac{4}{m^2}\sqrt{1+m^2}\,\sqrt{a(a-mc)}.$$

যদি এই সরল রেখা স্পর্শক হয়, তবে ছেদ বিন্দু দুইটির সমাপতন ঘটিবে। অর্থাৎ x এর দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে x এর যে দুইটি মান পাওয়া যাইবে,. তাহা অভিন্ন হইবে।

সুতরাং $4(mc-2a)^2=4m^2c^2$

অর্থাৎ $a^2-amc=0$

অথবা $c=\frac{a}{m}$.

অতএব $y=mx+c$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিবে, যখন $c=\frac{a}{m}$.

সুতরাং অধিবৃত্তের স্পর্শকের সাধারণ রূপ হইল $y=mx+\frac{a}{m}$, যেখানে m যে-কোন ধ্রুব রাশি।

টীকা ঃ ছেদক যদি স্পর্শক হইয়া দাঁড়ায়, তবে ছেদিতাংশ $=0$.

$$\therefore \quad a - mc = 0$$

অর্থাৎ $c = \frac{a}{m}$.

উদাহরণমালা

উদা ঃ ১। $3y^2 = 4x$ অধিবৃত্তের নাভিলম্ব এবং নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ; এবং ইহার সহিত $2x = 3y$ সরল রেখার ছেদ বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1935.]

$3y^2 = 4x$ কে লেখা যায়, $y^2 = \frac{4}{3}x$.

স্থতরাং নাভি লম্ব $= \frac{4}{3}$, এবং নাভির স্থানাঙ্ক $= (\frac{1}{3}, 0)$.

আবার $2x = 3y$ স্থতরাং $4x = 6y$;

অর্থাৎ $3y^2 = 6y$.

$\therefore \quad y = 0$ অথবা 2.

স্থতরাং $x = 0$ অথবা 3.

অতএব ছেদ বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, 0)$ এবং $(3, 2)$.

উদা ঃ ২। যদি $y = 3x + 1$ সরল রেখা $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে অধিবৃত্তের নাভিলম্ব নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1946.]

যেহেতু $y = 3x + 1$, স্থতরাং $(3x+1)^2 = 4ax$

অথবা $9x^2 + 2(3 - 2a)x + 1 = 0$.

যদি সরল রেখা অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে x-এর মান দুইটি অভিন্ন হইবে।

$\therefore \quad 4(3 - 2a)^2 = 36$

অথবা $3 - 2a = \pm 3$.

অর্থাৎ $a = 0$, অথবা 3.

কিন্তু $a = 0$ হইতে পারে না ; স্থতরাং $a = 3$.

অতএব নাভিলম্ব $= 12$.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সাধারণ রূপ, $y = mx + \frac{a}{m}$.

যদি $y = 3x + 1$ স্পর্শক হয় তবে $m = 3$ এবং $\frac{a}{m} = 1$.

সুতরাং $a = 3$. অতএব নাভি লম্ব $= 12$.

উদা ঃ ৩। $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ এবং $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু নির্ণয় কর ; এবং যদি $y^2 = 2ax$ অধিবৃত্ত এই বিন্দুর মধ্য দিয়া যায় তবে অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1943.]

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ এবং $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ এর সমাধান করিলে $x = \frac{6}{5}$, $y = \frac{6}{5}$.

অতএব সরল রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু $(\frac{6}{5}, \frac{6}{5})$.

অধিবৃত্ত $y^2 = 2ax$ এই বিন্দুর মধ্য দিয়া যায় ;

সুতরাং $(\frac{6}{5})^2 = 2a(\frac{6}{5})$.

অর্থাৎ $2a = \frac{6}{5}$.

সুতরাং অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = \frac{6}{5}x$.

অতএব ইহার নাভির স্থানাঙ্ক $(\frac{1}{4} \times \frac{6}{5}, 0)$, অর্থাৎ $(\frac{3}{10}, 0)$.

উদা ঃ ৪। $y = mx + c$ সরল রেখা $y^2 = 12x$ অধিবৃত্তকে দুইটি সমাপাতী বিন্দুতে ছেদ করে ; যদি রেখাটি $5y + 3x + 25 = 0$ রেখার সমান্তরাল হয়, তবে m এবং c এর মান নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1949.]

$y = mx + c$ যদি $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে তবে $c = \frac{a}{m}$.

অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 12x$; সুতরাং $a = 3$, অর্থাৎ $c = \frac{3}{m}$.

আবার $y=mx+c$ এবং $5y+3x+25=0$ পরস্পরের সমান্তরাল ;

সুতরাং $m=-\frac{3}{5}$.

অতএব $c=3\div(-\frac{3}{5})=-5$.

উদা: ৫। $y^2=12x$ অধিবৃত্তের স্পর্শক $4x-2y+3=0$ এবং স্পর্শ বিন্দু $(\frac{3}{4}, 3)$; প্রমাণ কর যে উপস্পর্শক অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয়।

[কঃ বিঃ 1950]

$4x-2y+3=0$ সরল রেখাটি x অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহার $y=0$.

সুতরাং $4x=-3$, অর্থাৎ $x=-\frac{3}{4}$.

স্পর্শ বিন্দুর ভুজ $=\frac{3}{4}$.

সুতরাং মূলবিন্দু অর্থাৎ শীর্ষ হইতে ছেদ বিন্দু দূরত্ব এবং স্পর্শ বিন্দুর ভুজ দৈর্ঘ্যে সমান, কিন্তু একটি ঋণাত্মক এবং অপরটি ধনাত্মক, অর্থাৎ তাহারা মূল বিন্দুর বিপরীত দিকে।

অতএব উপস্পর্শক অধিবৃত্তের শীর্ষ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয়।

প্রশ্নমালা

১। $y^2=4px$ অধিবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দুর মধ্য দিয়া যায় ; ইহার নাভি লম্ব এবং নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1934.]

২। $5y^2=7x$ অধিবৃত্তের নাভিলম্ব এবং নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[কঃ বিঃ 1936.]

৩। $y^2=8(x+1)$ অধিবৃত্তের নাভিলম্ব এবং নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[কঃ বিঃ 1937.]

৪। $y^2=x$ অধিবৃত্ত এবং $x-5y+6=0$ সরল রেখার ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1944.]

৫। প্রমাণ কর যে $4x-2y+3=0$ সরল রেখাটি $y^2=12x$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে, এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1947.]

৬। প্রমাণ কর যে $y=2x+3$ সরল রেখাটি $y^2=24x$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে, এবং স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

৭। যদি $y=3x+5$ সরল রেখাটি $y^2=8px$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

৮। $3y^2=16x$ অধিবৃত্ত এবং $3x-2y=1$ সরল রেখার ছেদ বিন্দু নির্ণয় কর।

৯। $y^2=7x$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক $4y-x+3=0$ সরল রেখার সমান্তরাল ; ইহার সমীকরণ এবং স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

১০। প্রমাণ কর যে, যদি $y=mx+c$ সরল রেখাটি $y^2=4a(x+a)$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে $c=ma+\frac{a}{m}$.

১১। প্রমাণ কর যে, যদি $lx+my+n=0$ সরল রেখাটি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে $ln=am^2$.

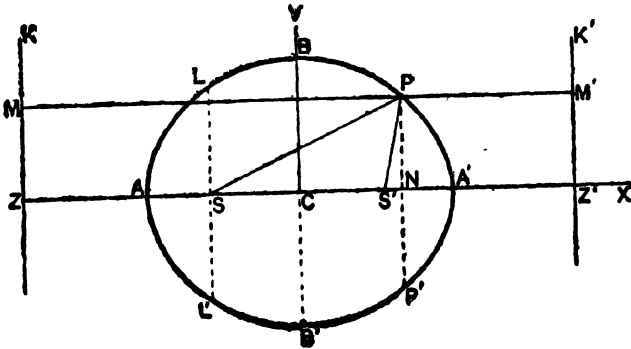
১২। $y^2=8x$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক x-অক্ষের উপর 60° কোণে নত ; স্পর্শকের সমীকরণ এবং স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

পঞ্চম অধ্যায়

উপবৃত্ত (The Ellipse)

৩১। যদি কোন সমতলের উপর একটি বিন্দু এমন ভাবে নড়িয়া বেড়ায় যে সমতলস্থ একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু এবং একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা হইতে তাহার দূরত্ব দুইটির অনুপাত ধ্রুব এবং একক অপেক্ষা ছোট হয়, তবে চলমান বিন্দুটির সঞ্চার পথকে **উপবৃত্ত** (ellipse) বলা হয়। নির্দ্দিষ্ট বিন্দুকে উপবৃত্তের নাভি, নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে নিয়ামক বলে। এই ধ্রুব অনুপাতকে উৎকেন্দ্রতা বলা হয় এবং e দ্বারা প্রকাশ করা হয়। উপবৃত্তের জন্য e সর্ব্বদা 1 অপেক্ষা ছোট হয়। নাভির মধ্য দিয়া নিয়ামকের উপর লম্ব সরল রেখাকে উপবৃত্তের **পরাক্ষ রেখা** (line of the major axis) বলে।

৩২। **উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়ঃ**

মনে কর উপবৃত্তের নিয়ামক ZK, নাভি S এবং SZ নাভি হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব। তবে SZ কে বর্দ্ধিত করিলে ইহাই উপবৃত্তের পরাক্ষ রেখা।

SZ কে A এবং A′ বিন্দুতে এমন ভাবে অন্তঃ ও বহির্বিভক্ত কর যে $SA = e.AZ$, এবং $SA' = e.A'Z$.

যেহেতু $e<1$, সুতরাং A এবং A′ বিন্দুদ্বয় নিশ্চয়ই পাওয়া যাইবে। AA′ কে C বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর, তাহা হইলে CA=CA′. AA′ কে $2a$ বলা হয়, সুতরাং CA=CA′$=a$.

তবে $SA+SA'=e(AZ+A'Z)$

অর্থাৎ $AA'=e\,(CZ-CA+CZ+CA')=e.2CZ$

অথবা $2a=2e.CZ$

অতএব $CZ=\frac{a}{e}$.

আবার, $e(A'Z-AZ)=SA'-SA$

অর্থাৎ $e.AA'=(CS+CA')-(CA-CS)=2CS$

অথবা $e.2a=2CS$

অতএব $CS=ae$.

সুতরাং $CZ.CS=\frac{a}{e}.ae=a^2=CA^2$.

মনে কর, C মূল বিন্দু, CA′ ভুজাক্ষ অর্থাৎ x-অক্ষ এবং C বিন্দুর মধ্যগামী এবং AA′ এর উপর লম্ব CY, y-অক্ষ। মনে কর P বক্রস্থ যে-কোন একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক (x, y). P হইতে নিয়ামক ZK এর উপর PM এবং AA′ এর উপর PN লম্ব টান। তবে $x=CN$ এবং $y=PN$.

যেহেতু $CS=ae$, সুতরাং নাভি S এর স্থানাঙ্ক $(-ae, o)$.

সংজ্ঞানুসারে P উপবৃত্তস্থ বিন্দু বলিয়া $SP^2=e^2.PM^2=e^2.ZN^2$.

সমকোণী ত্রিভুজ PNS হইতে, $SN^2+PN^2=SP^2=e^2.ZN^2$

অথবা $(CN+CS)^2+PN^2=e^2(CN+CZ)^2$

$$\therefore \quad (x+ae)^2+y^2=e^2\left(x+\frac{a}{e}\right)^2$$

অথবা $x^2(1-e^2)+y^2=a^2(1-e^2)$

অথবা $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1.$ ....(ক)

এই সমীকরণে $x=0$, বসাইলে $y=\pm a\sqrt{1-e^2}$; অর্থাৎ y-অক্ষ বক্রকে দুইটি বিন্দুতে, মনে কর B এবং B′এ ছেদ করে। B এবং B′ মূলবিন্দু C এর দুই দিকে এবং সমদূরবর্ত্তী।

সুতরাং $B'C=CB=a\sqrt{1-e^2}$;

BB′ কে $2b$ বলা হয়; $\therefore\ b=a\sqrt{1-e^2}.$

সুতরাং $b^2=a^2(1-e^2)=a^2-a^2e^2$

অর্থাৎ $CB^2=CA^2-CS^2.$

এইবার সমীকরণ (ক) তবে এই ভাবে লেখা যায়,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

A এবং A′ বিন্দু দুইটিকে উপবৃত্তের শীর্ষ বলা হয়; AA′ কে বলা হয় **পরাক্ষ** (major axis) এবং BB′ কে **উপাক্ষ** (minor axis). AA′ এর মধ্যবিন্দু C কে উপবৃত্তের **কেন্দ্র** (centre) বলা হয়, এবং ইহা BB′ এর ও মধ্যবিন্দু।

পুনরায় যেহেতু $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

সুতরাং $\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{a^2-x^2}{a^2}=\dfrac{(a+x)(a-x)}{a^2}$

অর্থাৎ $\dfrac{PN^2}{b^2}=\dfrac{AN\ .\ AN}{a^2}$

অতএব $\dfrac{PN^2}{AN\ .\ A'N}=\dfrac{BC^2}{AC^2}.$

যদি নাভি S এর মধ্য দিয়া LSL′ উপবৃত্তের দ্বিকোটি হয় তবে ইহাকে **নাভিলম্ব** বলে।

এখন যেহেতু L উপবৃত্তের উপর অবস্থিত, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $SL = e \times$ নিয়ামক হইতে L বিন্দুর দূরত্ব

$$= e.SZ = e(CZ - CS) = e.CZ - e.CS = a - ae^2$$

$$= a(1-e^2) = a\frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a}.$$

অতএব অভিলম্ব $LL' = \frac{2b^2}{a}$.

অথবা, যেহেতু S এর ভুজ $= -ae$, সুতরাং L এর ভুজ ও $= -ae$.

উপবৃত্তের সমীকরণে $x = -ae$ বসাইলে,

$$\frac{a^2e^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

অর্থাৎ $y^2 = b^2(1-e^2) = \frac{b^4}{a^2}$; অথবা $y = \frac{b_2}{a}$.

সুতরাং $SL = \frac{b^2}{a}$; অতএব নাভিলম্ব $= \frac{2b^2}{a}$.

৩৩। উপবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি এবং দ্বিতীয় নিয়ামক আছে।

পরাক্ষ অর্থাৎ x-অক্ষের উপর মূল বিন্দু হইতে ধনাত্মক দিকে একটি বিন্দু S′ লও, যাহাতে $CS' = SC = ae$, এবং একটি বিন্দু Z′ লও, যাহাতে $CZ' = ZC = \frac{a}{e}$.

Z′ এর মধ্য দিয়া ZZ′ এর উপর লম্ব Z′K′ সরল রেখা আঁক এবং P হইতে Z′K′ এর উপর PM′ লম্ব টান। (৩২) অনুচ্ছেদে $SP^2 = e^2PM^2$ সম্পর্ক হইতে পাওয়া গিয়াছিল

$$(x+ae)^2 + y^2 = e^2\left(x + \frac{a}{e}\right)^2$$

উভয় পক্ষ হইতে $4aex$ বিয়োগ করিলে পাওয়া যায়,

$$(x-ae)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$$

অর্থাৎ $S'P^2 = e^2\ PM'^2$.

তাহা হইলে দেখা যাইতেছে যে P বিন্দুর S′ এবং Z′K হইতে দূরত্বের অনুপাত ধ্রুব এবং e এর সমান। কিন্তু P বিন্দু উপবৃত্তের উপর অবস্থিত; সুতরাং S′ নাভি এবং Z′K′ নিয়ামক ধরিলে অথবা S নাভি এবং ZK নিয়ামক ধরিলে P বিন্দুর একই সঞ্চারপথ পাওয়া যায়।

অতএব উপবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি এবং দ্বিতীয় নিয়ামক আছে।

যেহেতু $CS' = ae$, সুতরাং S′ এর স্থানাঙ্ক (ae, o).

অতএব উপবৃত্তের নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, o)$

এখন $SP = e.PM = e.NZ = e\,CZ + e.CN = a + ex$,

এবং $S'P = e.PM' = e.NZ' = e.CZ' - e.CN = a - ex$,

অতএব $SP + S'P = 2a = AA'$.

অর্থাৎ উপবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুর নাভিগ দূরত্ব দুইটির যোগফল ধ্রুব এবং পরাক্ষের সমান।

৩৪। উপবৃত্তের যে-কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়ঃ

মনে কর উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, এবং উপবৃত্তের যে-কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x', y').

P এর কাছে উপবৃত্তেব উপর আর একটি বিন্দু Q লও, যাহার স্থানাঙ্ক (x'', y'')

ছেদক PQ এর সমীকরণ, $\frac{y - y'}{y' - y''} = \frac{x - x'}{x' - x''}$.

যেহেতু (x', y') এবং (x'', y'') উপবৃত্তের উপর অবস্থিত, সুতরাং

$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, এবং $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$,

অর্থাৎ $\frac{x'^2 - x''^2}{a^2} = -\frac{y'^2 - y''^2}{b^2}$.

$$\therefore \quad \frac{y-y'}{y'-y''} \times -\frac{y'^2-y''^2}{b^2} = \frac{x-x'}{x'-x''} \times \frac{x'^2-x''^2}{a^2}$$

অথবা $\quad -\dfrac{(y-y')(y'+y'')}{b^2} = \dfrac{(x-x')(x'+x'')}{a^2}.$

যখন Q ক্রমশঃ P বিন্দুর সন্নিকটস্থ হইয়া অবশেষে P বিন্দুর সহিত এক হইয়া যাইবে, অর্থাৎ $x'=x''$ এবং $y'=y''$ হইবে, তখন ছেদক PQ চরম অবস্থায় উপবৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

সুতরাং স্পর্শকের সমীকরণ হইবে, $-\dfrac{yy'-y'^2}{b^2} = \dfrac{xx'-x'^2}{a^2}$

অর্থাৎ $\quad \dfrac{xx'}{a^2} + \dfrac{yy'}{b^2} = \dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1.$

অতএব উপবৃত্তের (x', y') বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1.$$

টীকা ঃ যদি সরল রেখা $y=mx+c$, এই উপবৃত্তের স্পর্শক হয়, তবে $y=mx+c$, এবং (x', y') এর কোন বিশেষ মানের জন্য $\dfrac{xx'}{a^2} + \dfrac{yy'}{b^2} = 1$, অভিন্ন হইবে।

সুতরাং $\quad \dfrac{x'}{-a^2m} = \dfrac{y'}{b^2} = \dfrac{1}{c}.$

অর্থাৎ $\quad x' = -\dfrac{a^2m}{c}$, এবং $y' = \dfrac{b^2}{c}.$

কিন্তু (x', y') উপবৃত্তের উপর অবস্থিত ; সুতরাং $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$

অর্থাৎ $\quad \dfrac{a^2m^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2} = 1,$

অথবা $\quad c = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$

অতএব $y=mx+c$ সরল রেখা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করিবে, যদি $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ হয় ; এবং স্পর্শ বিন্দু হইবে

$$\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right).$$

সুতরাং $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শকের সাধারণ সমীকরণ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$, যেখানে m যে-কোন একটি ধ্রুবক।

৩৫। একটি সরল রেখা ও উপবৃত্তের ছেদ ঃ

মনে কর $y=mx+c$ একটি সরল রেখা। ইহা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তকে কোন কোন বিন্দুতে ছেদ করিতেছে নির্ণয় করিতে হইলে এই দুইটি সহসমীকরণের সমাধান করিতে হয়।

সুতরাং y এর পরিবর্তে $mx+c$ বসাইলে,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$$

অর্থাৎ $x^2(a^2m^2+b^2)+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0.$

ইহা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ; সুতরাং x এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে।

$y=mx+c$ তে এই মান দুইটি বসাইলে y এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে।

অতএব একটি সরল রেখা সাধারণতঃ একটি উপবৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে কর x এর দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে x_1 এবং x_2 দুইটি সমাধান পাওয়া যায়।

তবে $x_1+x_2=-\frac{2a^2mc}{a^2m^2+b^2}$, এবং $x_1x_2=\frac{a^2(c^2-b^2)}{a^2m^2+b^2}.$

সুতরাং $x_1-x_2=\sqrt{\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\}}$

$$=\frac{2ab\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2}}{a^2m^2+b^2}.$$

যদি ছেদ বিন্দুদ্বয় (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) হয়, তবে

$y_1-y_2=(mx_1+c)-(mx_2+c)=m(x_1-x_2)$.

অতএব সরল রেখার উপবৃত্তের মধ্যস্থিত ছেদিতাংশ

$$=\sqrt{\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\}}$$
$$=\sqrt{1+m^2}\,(x_1-x_2)$$
$$=\frac{2ab\sqrt{1+m^2}\,\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2}}{a^2m^2+b^2}.$$

যদি এই সরল রেখা স্পর্শক হয়, তবে ছেদ বিন্দু দুইটির সমাপতন ঘটিবে। অর্থাৎ x এর দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে x এর যে দুইটি মান পাওয়া যাইবে, তাহা অভিন্ন হইবে।

সুতরাং $\quad (2a^2mc)^2=4(a^2m^2+b^2)\times a^2(c^2-b^2)$

অর্থাৎ $\quad 0=(a^2m^2+b^2)-c^2$

অথবা $\quad c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$.

অতএব $y=mx+c$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করিবে, যদি $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ হয়।

সুতরাং উপবৃত্তের স্পর্শকের সাধারণ রূপ হইল $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$, যেখানে m যে-কোন ধ্রুব রাশি।

টীকা : ছেদক যদি স্পর্শক হইয়া দাঁড়ায়, তবে ছেদিতাংশ $=0$.

$\therefore \quad a^2m^2+b^2-c^2=0$

অর্থাৎ $\quad c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$.

উদাহরণমালা

উদা : ১। $3x^2+4y^2=48$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা ও নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1941.]

প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণকে এই ভাবে লেখা যায়,

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

তাহা হইলে $a^2=16$, এবং $b^2=12$.

যেহেতু $b^2=a^2(1-e^2)$

সুতরাং $12=16(1-e^2)$

অর্থাৎ $e^2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

অতএব $e=\frac{1}{2}$.

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, o)$;

অর্থাৎ $(\pm 4\times\frac{1}{2}, 0)$

অথবা $(\pm 2, 0)$.

উদা ঃ ২। এমন একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহার অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় এবং যাহা $\frac{x}{7}+\frac{y}{2}=1$ সরল রেখাকে x অক্ষের উপর এবং $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ সরল রেখাকে y অক্ষের উপর ছেদ করে ; এই উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1938.]

$\frac{x}{7}+\frac{y}{2}=1$ সরল রেখাটি x অক্ষকে $(7, 0)$ বিন্দুতে এবং $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ সরল রেখাটি y অক্ষকে $(0, 5)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের উপর, সুতরাং ইহার সমীকরণ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

এই উপবৃত্ত $(7, 0)$ এবং $(0, 5)$ বিন্দু দুইটি মধ্য দিয়া যায় ;

সুতরাং $a^2=7^2$, এবং $b^2=5^2$.

অতএব উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{5^2}=1.$

পুনরায়, যেহেতু $b^2 = a^2(1-e^2)$

সুতরাং $5^2 = 7^2(1-e^2)$

অর্থাৎ $e^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$

অতএব $e = \frac{2}{7}\sqrt{6}$.

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$

অর্থাৎ $(\pm 7 \times \frac{2}{7}\sqrt{6}, 0)$

অথবা $(\pm 2\sqrt{6}, 0)$.

উদা ঃ ৩। একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় এবং ইহা $(-3, 1)$ এবং $(2, -2)$ বিন্দু দুইটির মধ্য দিয়া যায় ; ইহার সমীকরণ এবং উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1945.]

যেহেতু উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়, সুতরাং ইহার সমীকরণ হইবে

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

পুনরায়, যেহেতু ইহা $(-3, 1)$ এবং $(2, -2)$ বিন্দু দুইটির মধ্য দিয়া যায়,

সুতরাং $\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, এবং $\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$.

সমাধান করিলে $a^2 = \frac{32}{3}$, এবং $b^2 = \frac{32}{5}$.

অতএব উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{\frac{32}{3}} + \frac{y^2}{\frac{32}{5}} = 1$,

অর্থাৎ $3x^2 + 5y^2 = 32$.

আবার, যেহেতু $b^2 = a^2(1-e^2)$

সুতরাং $\frac{32}{5} = \frac{32}{3}(1-e^2)$

অর্থাৎ $e^2 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

অতএব $e = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{10}$.

উদা ঃ ৪। একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়, এবং ইহা

$(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়; যদি ইহার উৎকেন্দ্রতা $= \frac{4}{5}$ হয়, উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় হয়। [কঃ বিঃ 1942.]

যেহেতু উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়, সুতরাং ইহার সমীকরণ হইবে,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

ইহা $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়, সুতরাং

$$\frac{100}{9a^2}+\frac{5}{b^2}=1.$$

আবার ইহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{4}{5}$, সুতরাং

$$b^2=a^2(1-\tfrac{16}{25})=\tfrac{9}{25}a^2.$$

সমাধান করিলে $a^2=25$, এবং $b^2=9$.

অতএব উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$

উদাঃ ৫। $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তটি $7x+13y-87=0$ এবং $5x-8y+7=0$ সরল রেখা দুইটির ছেদ বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়, এবং ইহার নাভিলম্ব $\frac{32}{5}\sqrt{2}$; a এবং b নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1949.]

$7x+13y-87=0$, এবং $5x-8y+7=0$ সহ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিলে, $x=5$, $y=4$ হয়।

সুতরাং সরল রেখা দুইটির ছেদ বিন্দু $(5, 4)$.

উপবৃত্ত এই বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়, সুতরাং

$$\frac{25}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1.$$

পুনরায়, নাভিলম্ব $=\frac{2b^2}{a}=\frac{32}{5}\sqrt{2}$; অর্থাৎ $b^2=\frac{16\sqrt{2}}{5}a$.

সুতরাং $$\frac{25}{a^2}+\frac{16\times 5}{16\sqrt{2}a}=1,$$

অর্থাৎ $a^2 - \frac{5}{\sqrt{2}}a - 25 = 0,$

অথবা $\left(a - \frac{10}{\sqrt{2}}\right)\left(a + \frac{5}{\sqrt{2}}\right) = 0.$

সুতরাং $a = \frac{10}{\sqrt{2}}$ এবং $-\frac{5}{\sqrt{2}}.$

কিন্তু $a = -\frac{5}{\sqrt{2}},$ অর্থাৎ ঋণাত্মক হইতে পারে না।

অতএব $a = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$ লইতে হইবে।

$\therefore \quad b^2 = \frac{16\sqrt{2}}{5} \times 5\sqrt{2},$ অর্থাৎ $b = \pm 4\sqrt{2}.$

কিন্তু $b = -4\sqrt{2},$ অর্থাৎ ঋণাত্মক হইতে পারে না।

অতএব $b = 4\sqrt{2}$ লইতে হইবে।

উদা ঃ ৬। প্রমাণ কর যে $x + 3y = 5$ সরল রেখাটি $4x^2 + 9y^2 = 20$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে, এবং ইহার স্পর্শ বিন্দু নির্ণয় কর।

উপবৃত্তের ও সরল রেখার সমীকরণ সমাধান করিলে ছেদ বিন্দু পাওয়া যাইবে।

$x = 5 - 3y$; সুতরাং $4(5 - 3y)^2 + 9y^2 = 20,$

অর্থাৎ $9y^2 - 24y + 16 = 0,$

অথবা $(3y - 4)^2 = 0.$

$\therefore \quad y = \frac{4}{3}, \frac{4}{3}.$

y এর দুইটি মান অভিন্ন হইল ; সুতরাং ছেদ বিন্দু দুইটি এক হইয়া গেল।

অতএব প্রদত্ত সরল রেখা প্রদত্ত উপবৃত্তকে স্পর্শ করে।

যেহেতু $y = \frac{4}{3},$ সুতরাং $x = 5 - 3 \times \frac{4}{3} = 1.$

অতএব স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, \frac{4}{3}).$

প্রশ্নমালা ৫

১। p এর মান কত হইলে $px^2+4y^2=1$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া যাইবে? উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1935.]

২। $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ উপবৃত্তটির e নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1936.]

৩। $x^2+2y^2=2$ উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1937.]

৪। একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়, এবং ইহা (2, 2) এবং (3, 1) বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া যায়; ইহার সমীকরণ ও উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1939.]

৫। একটি উপবৃত্তের নিয়ামক হইতে নাভির দূরত্ব 16 ইঞ্চ এবং ইহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{3}{5}$; ইহার অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1943.]

৬। $9x^2+25y^2=225$ উপবৃত্তটির e নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1944.]

৭। একটি উপবৃত্তের নাভিলম্ব 4 ইঞ্চ এবং একটি শীর্ষ হইতে নিকটতর নাভির দূরত্ব 1·5 ইঞ্চ; ইহার উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1944.]

৮। একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়, এবং ইহা $(-3, 1)$ বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়; যদি ইহার উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{2}{5}}$ হয়, তবে ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1948.]

৯। উপবৃত্ত $x^2+2y^2=2$ লইয়া প্রমাণ কর যে, CS. C× $=$ CA^2. [কঃ বিঃ 1950.]

১০। এমন উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহার অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় এবং যাহা নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের মধ্যগামী,

(ক) $(-3, 1)$ এবং $(2, -2)$;

(খ) $(0, 2\sqrt{2})$ এবং $(-3, 0)$;

(গ) $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right)$ এবং $(5, 0)$;

(ঘ) $(1, 4)$ এবং $(-6, 1)$.

১১। এমন উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহার অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়, এবং

(ক) যাহার নাভিলম্ব 5 এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{2}{3}$;

(খ) যাহার নাভিলম্ব $4\frac{1}{2}$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$;

(গ) যাহার নাভিদ্বয় $(\pm 1, 0)$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{1}{5}}$;

(ঘ) যাহার উপাক্ষ নাভিদ্বয়ের দূরত্বের সমান এবং নাভিলম্ব 10.

১২। নিম্নলিখিত উপবৃত্ত সমূহের নাভিলম্ব, উৎকেন্দ্রতা এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

(ক) $5x^2+4y^2=1$; (খ) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$;

(গ) $9x^2+16y^2=144$.

১৩। ছেদ বিন্দু নির্ণয় কর :

(ক) $3x+2y=12$ সরল রেখার সহিত $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{15}=1$ উপবৃত্তের ;

(খ) $5x+2y=30$ সরল রেখার সহিত $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=9$ উপবৃত্তের ;

(গ) $3x+5y=0$ সরল রেখার সহিত $9x^2+25y^2=225$ উপবৃত্তের।

১৪। প্রমাণ কর যে

(ক) $x-3y=13$ সরল রেখাটি $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে ;

(খ) $x+2y=8$ সরল রেখাটি $3x^2+4y^2=48$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে ;

(গ) $y=x+\sqrt{\frac{7}{12}}$ সরল রেখাটি $3x^2+4y^2=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে ;

এবং প্রত্যেকটির স্পর্শ বিন্দু নির্ণয় কর।

১৫। একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় এবং ইহা $y=x+7$ সরল রেখাকে স্পর্শ করে ; যদি ইহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{5}$ হয়, তবে ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা ১

(পৃঃ ৬—৯)

১। (ক) 5 ; (খ) 13 ; (গ) $\sqrt{a^2+b^2}$;

(ঘ) $\sqrt{\{a^2+2b^2+c^2-2ab-2bc\}}$; (ঙ) $2a \sin\frac{\theta-\phi}{2}$;

(চ) $a(t_1-t_2)\sqrt{(t_1+t_2)^2+4}$; (ছ) $\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta-\sin\theta)$;

(জ) $c\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)\{1+t_1{}^2t_2{}^2\}^{\frac{1}{2}}$; (ঝ) $\sqrt{a^2+b^2}$.

৫। (ক) $(\frac{10}{7}, \frac{33}{7})$; (খ) $(5, 3)$; (গ) $(-11, 16)$;
(ঘ) $(-20\frac{1}{2}, 34\frac{1}{2})$.

৬। $(-\frac{1}{3}, 0)$; $(-\frac{5}{3}, 2)$.

৭। $(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$; $(1, 1)$; $(\frac{9}{2}, -\frac{5}{2})$.

৮। $\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}, \frac{a^2+2ab-b^2}{a+b}\right)$; $\left(\frac{a^2-2ab-b^2}{a-b}, \frac{a^2+b^2}{a-b}\right)$.

১০। (ক) $(\frac{2}{3}, 4)$; (খ) $(\frac{1}{3}, 2)$ (গ) $(\frac{13}{3}, 3)$; (ঘ) $(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$;

১১। (ক) 29 ; (খ) 20 ; (গ) $2ac$; (ঘ) $7\frac{1}{2}$;

(ঙ) $a^2(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)$;

(চ) $2ab \sin\frac{\beta-\gamma}{2} \sin\frac{\gamma-\alpha}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

(ছ) $\frac{a^2}{2m_1m_2m_3}(m_2-m_3)(m_3-m_1)(m_1-m_2)$;

(জ) $\frac{1}{2}a^2(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)$]

প্রশ্নমালা ২(ক)

(পৃঃ ১৮—২০)

১। $y=x-3$.

২। (ক) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+2$; (খ) $x-y=4$, অথবা $x+y+4=0$; (গ) $x+y=3$; (ঘ) $3x-5y=15$.

৩। (ক) $3x+2y=6$; (খ) $4y=5x+20$; (গ) $4x+3y+12=0$; (ঘ) $5x-2y=10$.

৪। $x+y=1$. ৫। $x-y=7$.

৬। (ক) $y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$; (খ) $\frac{x}{-\frac{5}{3}}+\frac{y}{-\frac{5}{4}}=1$.

৭। (ক) $2x-y=0$; (খ) $y=x+1$; (গ) $10x+7y-11=0$; (ঘ) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; (ঙ) $t_1t_2y+x=a(t_1+t_2)$;

(চ) $y(t_1+t_2)-2x=2at_1t_2$;

(ছ) $\frac{x}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

(জ) $bx\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-ay\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=ab\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

১০। $x=3$. ১১। $xb'-ay+\frac{1}{2}(ab-a'b')=0$.

১২। $5y+8x=60$.

১৩। $\frac{x}{5}+\frac{y}{12}=\pm1$; $\frac{x}{12}+\frac{y}{5}=\pm1$.

১৪। $4kx=l^2$, যেখানে ত্রিভুজের ভূমি $=2k$, এবং দুইটি ভুজের বর্গান্তর $=l^2$.

প্রশ্নমালা ২(খ)

(পৃঃ ২৭—২৯)

১। (ক) $(2, 3)$ এবং $tan^{-1} \frac{11}{23}$; (খ) $(2, -1)$ এবং $tan^{-1} \frac{37}{5}$;

(গ) $(1, -1)$ এবং $tan^{-1}(-\frac{22}{2})$;

(ঘ) $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$ এবং $tan^{-1} \frac{a^2-b^2}{2ab}$;

(ঙ) $\left[\frac{a}{m_1 m_2}, a\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\right]$ এবং $tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1 m_2}$;

(চ) $\left[a\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}, b\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\right]$ এবং $tan^{-1}\frac{ab(\cot\alpha-\cot\beta)}{a^2+b^2\cot\alpha\cot\beta}$.

(ছ) $\left(-\frac{ac}{a^2+b^2}, \frac{bc}{a^2+b^2}\right)$ এবং $45°$.

৩। $(\frac{20}{3}, \frac{20}{3})$ এবং $x+y=\frac{40}{3}$.

৪। $3x+y-5=0$.

৫। $4x-3y+1=0$.

৬। $2x-y-11=0$.

৭। $y=4x-8$.

৮। $11x+4y-10=0$.

৯। $2x+3y=8$.

১০। $x+3y=1$.

১১। $7x+6y=85$.

১২। নির্ণেয় সমীকরণ $(Ax+By+C)+k(A'x+B'y+C')=0$ যেখানে k

(ক) $-\frac{C}{C'}$; (খ) $-\frac{B}{B'}$; (গ) $-\frac{Ba+C}{B'a+C'}$;

(ঘ) $-\frac{Ax'+By'+C}{A'x'+B'y'+C'}$; (ঙ) $-\frac{AB''-BA''}{A'B''-B'A''}$.

১৩। $a=\frac{17}{4}$, $b=\frac{17}{5}$.

১৪। $x+y=\pm1$, $x-y=\pm1$.

প্রশ্নমালা ৩

(পৃঃ ৩৭—৩৯)

১। (ক) $x^2+y^2+6x-4y-3=0$;

(খ) $x^2+y^2+10x+12y-39=0$;

(গ) $x^2+y^2-2ax-2by=0$;

(ঘ) $x^2+y^2-2ax+2by-2ab=0$;

(ঙ) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

২। (ক) $(2, 1)$ এবং 4; (খ) $(-a, -b)$ এবং $\sqrt{a^2+b^2}$;

(গ) $(\frac{1}{2}k, o)$ এবং $\frac{\sqrt{5}}{2}k$. (ঘ) $\left(\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{mc}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ এবং c;

(ঙ) $(\frac{1}{5}, \frac{3}{10})$ এবং $\frac{1}{10}\sqrt{13}$.

৩। (ক) $x^2+y^2-2x-2y=0$; (খ) $x^2+y^2-ax-by=0$;

(গ) $x^2+y^2-4x-6y+11=0$;

(ঘ) $x^2+y^2+7x-9y=0$;

(ঙ) $b(x^2+y^2)-(a^2+b^2)x+(a-b)(a^2+b^2)=0$.

৪। $b(x^2+y^2-a^2)=x(b^2+h^2-a^2)$.

৫। $15x^2+15y^2-94x+18y+55=0$.

৬। $x^2+y^2-3x-4y=0$.

৭। $x^2+y^2-ax-by=0$.

৮। $x^2+y^2-5x+2y=0$; অথবা

$x^2+y^2-11x-10y+24=0$.

৯। $x^2+y^2=36$. ১০। $(5, 12)$ এবং $(12, 5)$.

১১। (ক) $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$;

(খ) $x^2+y^2\pm2ax\pm2ay+a^2=0$;

(গ) $x^2+y^2-2k(x+y)+k^2=0$, যেখানে

$$k=(a+b)\pm 2\sqrt{ab}.$$

(ঘ) $a(x^2+y^2)=x(a^2+b^2)$;

(ঙ) $x^2+y^2-2ax-2ky+a^2=0$, যেখানে $k=\pm\sqrt{a^2+9}$.

১২। $\left(-\frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$.

১৩। (ক) $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$; (খ) $my+x=\pm a\sqrt{1+m^2}$;

(গ) $y=mx+(c-mb)$, যেখানে m পাওয়া যাইবে

$(a^2-b^2)m^2+2bcm+a^2-c^2=0$ সমীকরণ হইতে ;

(ঘ) $x+a\sqrt{2}=\pm y$.

১৪। (ক) $x^2+y^2-6x-8y+\frac{381}{169}=0$;

(খ) $x^2+y^2-7(2\pm\sqrt{2})(x+y)+49(\frac{3}{2}\pm\sqrt{2})=0$.

১৫। $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

প্রশ্নমালা ৪

(পৃঃ ৪৭—৪৮)

১। $\frac{4}{3}$ এবং $(\frac{1}{3}, 0)$.

২। $\frac{7}{3}$ এবং $(\frac{7}{12}, 0)$.

৩। 8 এবং $(1, 0)$.

৪। $(4, 2)$ এবং $(9, 3)$.

৫। $(\frac{3}{4}, 3)$

৬। $(\frac{3}{2}, 6)$.

৭। $(\frac{5}{3}, 10)$.

৮। $(3, 4)$ এবং $(\frac{1}{27}, -\frac{4}{9})$.

৯। $4y=x+28$, এবং $(28, 14)$.

১২। $y=\sqrt{3}(x+\frac{2}{3})$, এবং $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$.

প্রশ্নমালা ৫

(পৃঃ ৬১—৬২)

১। $p=1$; অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 2 এবং 1.

২। $e=\frac{4}{5}$.

৩। $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$; নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm 1, 0)$.

৪। $3x^2+5y^2=32$; $e=\sqrt{\frac{2}{5}}$.

৫। 30 ইঞ্চ, 24 ইঞ্চ।

৬। $e=\frac{4}{5}$.

৭। $e=\frac{1}{3}$.

৮। $3x^2+5y^2=32$.

১০। (ক) $3x^2+5y^2=32$; (খ) $8x^2+9y^2=72$;
(গ) $16x^2+25y^2=400$; (ঘ) $3x^2+7y^2=115$.

১১। (ক) $20x^2+36y^2=405$; (খ) $3x^2+4y^2=27$;
(গ) $4x^2+5y^2=20$; (ঘ) $x^2+2y^2=100$.

১২। (ক) $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{5}\sqrt{5}$; $(0, \pm\frac{1}{10}\sqrt{5})$;
(খ) $\frac{32}{5}$; $\frac{2}{3}$; $(\pm 2, 0)$; (গ) $\frac{9}{2}$; $\frac{\sqrt{7}}{4}$; $(\pm\sqrt{7}, 0)$.

১৩। (ক) $(2, 3), (\frac{14}{3}, \frac{9}{5})$; (খ) $(4, 5), (6, 0)$;
(গ) $(\frac{5}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}), (-\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{8}{2}\sqrt{2})$.

১৪। (ক) $(\frac{25}{13}, -\frac{48}{13})$; (খ) $(2, 3)$; (গ) $(-\frac{2}{21}\sqrt{21}, \frac{1}{21}\sqrt{21})$.

১৫। $24x^2+25y^2=600$.

শুদ্ধিপত্র

পৃঃ ৮, প্রশ্ন ১০, 'পরিকেন্দ্র' এর পরিবর্তে 'ভরকেন্দ্র' হইবে।

পৃঃ ২৪, ছত্র ৫, $\tan L_1AL_2=\propto$ এর পরিবর্তে $\tan L_1AL_2=\infty$ হইবে।

পৃঃ ২৭, প্রশ্ন ১(গ), $2x-3y+5=0$ এর পরিবর্তে $2x-3y-5=0$ হইবে।

ঘন জ্যামিতি

প্রথম অধ্যায়

রেখা এবং সমতল (Lines and Planes)

প্রথমে কয়েকটি সংজ্ঞা দেওয়া হইতেছে :

১। (ক) একটি **বিন্দুর** (point) কেবল অবস্থিতি (position) আছে, কিন্তু কোন আয়তন (magnitude) নাই। অর্থাৎ ইহার দৈর্ঘ্য (length), প্রস্থ (breadth), বেধ (thickness) কিছুই নাই ; সুতরাং বিন্দু **মাত্রাহীন** (no dimension)।

(খ) একটি **রেখার** (line) কেবল দৈর্ঘ্য ও অবস্থিতি আছে, কিন্তু প্রস্থ নাই, বেধও নাই ; সুতরাং রেখা **একমাত্রিক**।

(গ) একটি **তল** বা **পৃষ্ঠের** (surface) দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ এবং অবস্থিতি আছে, কিন্তু বেধ নাই ; সুতরাং তল **দ্বিমাত্রিক**।

(ঘ) একটি **ঘনের** (solid) দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, বেধ এবং অবস্থিতি আছে ; সুতরাং ঘন **ত্রিমাত্রিক**।

২। (ক) তলসমূহের দ্বারা বেষ্টিত দেশকে ঘন বলে। ঘনের সীমা তল। দুইটি ঘনের সাধারণ সীমা হইতে তলের উৎপত্তি।

(খ) রেখা সমূহের দ্বারা বেষ্টিত দেশকে তল বলে। তলের সীমা রেখা। দুইটি তলের পরস্পর ছেদ হইতে রেখার উৎপত্তি।

(গ) বিন্দুসমূহের দ্বারা বেষ্টিত দেশকে রেখা বলে। রেখার সীমা বিন্দু। দুইটি রেখার ছেদ হইতে বিন্দুর উৎপত্তি।

৩। **ইউক্লিডের সংজ্ঞা** : যে রেখা নিজের উপরিস্থ বিন্দুসমূহের মধ্যে ঋজুভাবে থাকে, তাহার নাম **সরল রেখা** (**straight line**). এ ক্ষেত্রে ঋজুভাব কাহাকে বলে তাহা জানা আছে ধরিয়া লওয়া হইয়াছে।

আর্কিমিডিস ও লাজাঁদ্রের সংজ্ঞা :—দুইটি বিন্দুর ন্যূনতম দূরত্বের নাম সরল রেখা।

প্লেফেয়ারের সংজ্ঞা—যদি দুইটি রেখা এমন হয় যে, তাহারা তাহাদের সব অবস্থানেই যে-কোন দুইটি বিন্দুতে মিলিত হইলেই সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যায়, তবে তাহাদের প্রত্যেকটিকে সরল রেখা বলে।

ইহাকে ঠিক সংজ্ঞা বলা যায় না, লক্ষণ বলা যাইতে পারে। জ্যামিতির দিক দিয়া বিচার করিলে সংজ্ঞা এইরূপ দেওয়া যায় :—

যে রেখার কোন দুই বিন্দুর অবস্থিতি জানিলে সমস্ত রেখাটির অবস্থিতি জানা যায়, তাহাকে সরল রেখা বলে। যে রেখা সরল নহে তাহাকে **বক্ররেখা** (**curved line**) বলে।

৪। যে তলের উপরিস্থ যে-কোন দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরল রেখা ঐ তলের সহিত সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যায়, তাহাকে **সমতল** (plane) বলে। যে তল সমতল নহে, তাহাকে **বক্রতল** (**curved surface**) বলে।

৫। একই সমতলের উপর অবস্থিত রেখা বা বিন্দুসমূহ, অথবা রেখা বা বিন্দুসমূহ যদি এমন হয় যে তাহাদের মধ্য দিয়া একটি সমতল আঁকা যায়, তবে তাহাদের **একতলীয়** বা **সামতলিক** (coplanar) বলে।

যে রেখাসমূহের মধ্য দিয়া একটি সমতল আঁকা যায় না, তাহাদের **অসামতলিক** (**skew**) বলে।

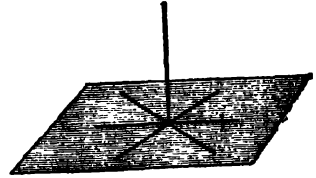
৬। দুইটি সমতল যদি তাহাদের যে-কোন দিকে অনন্ত পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত করিলেও পরস্পরকে ছেদ না করে, তবে তাহাদিগকে **সমান্তরাল** বলা হয়।

দুইটি সামতলিক সরল রেখা পরস্পরকে ছেদ করিবে অথবা সমান্তরাল হইবে।

একটি সরল রেখা ও একটি সমতল যদি অনন্ত পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হইলেও পরস্পরকে ছেদ না করে, তবে তাহাদিগকে সমান্তরাল বলা হয়।

৭। একটি সরল রেখা যদি বাহিরের কোন সমতলের সহিত ছেদবিন্দুতে মিলিত সমতলস্থ প্রত্যেক সরল রেখার উপর লম্ব হয়, তবে ঐ রেখাকে এই সমতলের উপর **লম্ব (perpendicular)** বলে।

৮। একটি সরল রেখা অথবা সমতল ওলন দড়ির (plumb line) সমান্তরাল হইলে, তাহাকে **উল্লম্ব** (vertical) বলা হয়।

উল্লম্বের উপর লম্ব সমতলকে **অনুভূমিক** (horizontal) বলে।

একটি সরল রেখা সম্পূর্ণরূপে অনুভূমিক সমতলের উপর থাকিলে তাহাকেও অনুভূমিক বলা হয়।

৯। নিম্নলিখিত গুণাবলীকে **স্বতঃসিদ্ধ** বলিয়া ধরা যাইতে পারে :

(ক) একটি সমতলস্থ দুইটি বিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত সরল রেখাকে উভয় দিকে অনন্ত পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত করিলেও উহা সম্পূর্ণরূপে সেই সমতলের উপরেই থাকিবে।

(খ) একটি সরল রেখা অথবা দুইটি বিন্দুর মধ্য দিয়া অসংখ্য সমতল আঁকা যায় ; যেহেতু প্রদত্ত সরল রেখাকে অক্ষ ধরিয়া সমতলকে যতখানি ইচ্ছা ঘুরাইয়া দেওয়া যায়।

(গ) একটি সমতলস্থ সরল রেখাকে অক্ষ ধরিয়া সেই অসীম সমতলকে যদি ঘুরাইয়া দেওয়া যায়, তবে তাহা সরল রেখার বহির্ভূত যে-কোন স্থানের যে-কোন বিন্দুর মধ্য দিয়া যাইবে।

এই গুণাবলী হইতে দেখা যাইতেছে যে সরল রেখা ও সমতলের মধ্যে তিন রকমের সম্পর্ক আছে :

(ক) সরল রেখাটি সমতলের **সমান্তরাল** হইতে পারে; সে ক্ষেত্রে উভয়ের মধ্যে কোন বিন্দুই সাধারণ নয়।

(খ) সরল রেখাটি সমতলকে **ছেদ** করিতে পারে; সে ক্ষেত্রে উভয়ের মধ্যে কেবলমাত্র একটি বিন্দু সাধারণ।

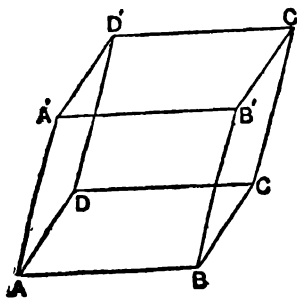
(গ) সরল রেখাটি সমতলস্থ হইতে পারে; সে ক্ষেত্রে উভয়ের মধ্যে অসংখ্য বিন্দু সাধারণ হইবে।

পুনরায়, দুইটি সরল রেখার পরস্পরের মধ্যে তিন রকমের সম্পর্ক আছে: যদি রেখাদ্বয় সামতলিক হয়, তবে তাহারা

(ক) পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে;

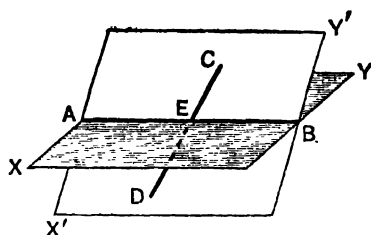
(খ) সমান্তরাল হইতে পারে;

এবং যদি তাহারা সামতলিক না হয়, তবে তাহারা

(গ) পরস্পরকে ছেদও করিবে না এবং সমান্তরালও হইবে না।

বুঝিবার সুবিধার জন্য, একটি ঘনচিত্র আঁকা হইয়াছে। ইহার (ক) দুইটি সীমার দুইটি সরল রেখা AB এবং BC সমতল ABCD এর উপর অবস্থিত এবং তাহারা পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে; (খ) AB এবং DC ও সমতলটির উপরই আছে এবং উহারা সমান্তরাল; এবং (গ) AB ও B'C' অসামতলিক; তাহারা পরস্পরকে ছেদও করে না, তবু পরস্পর সমান্তরালও নহে।

উপপাদ্য ১

দুইটি পরস্পর-ছেদী সরল রেখার মধ্য দিয়া একটি এবং কেবল-মাত্র একটি সমতল আঁকা যায়।

[One, and only one plane may be made to pass through any two intersecting straight lines.]

মনে কর দুইটি সরল রেখা AB এবং CD পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB এবং CD এর মধ্য দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল আঁকা যায়।

AEB এর মধ্য দিয়া একটি সমতল XY আঁক এবং AB কে অক্ষ ধরিয়া সমতলকে ঘুরাইতে থাক, যতক্ষণ না C বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়। মনে কর সমতলের নূতন অবস্থিতি X′Y′. তাহা হইলে ঘূর্ণীয়মান সমতলের ইহা একটি নির্দ্দিষ্ট অবস্থিতি ; অর্থাৎ সরল রেখা AB এবং বাহিরের একটি বিন্দু C এর মধ্য দিয়া কেবলমাত্র একটি সমতলই আঁকা যায়।

যেহেতু এই সমতলের উপর C এবং E বিন্দু দুইটি আছে, সুতরাং সমগ্র সরল রেখা CEDও ইহার উপর অবস্থিত।

অতএব, একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল AB এবং CD এর মধ্য দিয়া আঁকা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি তিনটি সরল রেখার প্রত্যেক দুইটি পরস্পরকে ছেদ করে, তবে তাহারা সামতলিক ; অর্থাৎ তিনটি সরল রেখা দ্বারা ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব হইলে তাহারা সামতলিক।

টীকা ঃ এই উপপাদ্য হইতে পাওয়া গেল যে, একটি সমতলের অবস্থিতি নির্দ্দিষ্ট হয়, যদি তাহা

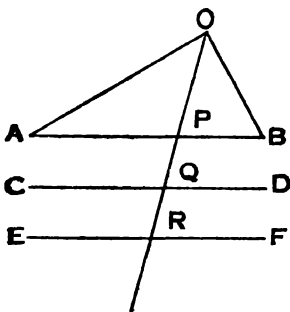
(ক) একটি সরল রেখা এবং রেখার বহির্ভূত একটি বিন্দুর মধ্যগামী হয় ;

(খ) দুইটি পরস্পর ছেদী সরল রেখার মধ্যগামী হয় ;

(গ) তিনটি অ-সমরেখ বিন্দুর মধ্যগামী হয় ;

(ঘ) দুইটি সমান্তরাল সরল রেখার মধ্যগামী হয়।

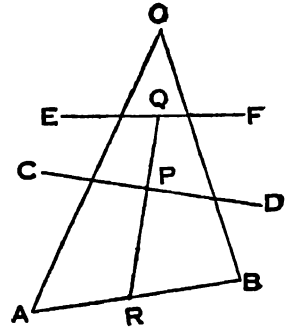
উদাহরণমালা

উদাঃ ১। প্রমাণ কর যে, যদি তিনটি অথবা ততোধিক সমান্তরাল সরল রেখা একটি প্রদত্ত সরল রেখাকে ছেদ করে, তবে তাহারা সামতলিক।

মনে কর, AB, CD, EF,···ইত্যাদি একটি সমান্তরাল সরল রেখার গোষ্ঠী যাহারা প্রদত্ত সরল রেখা OPQR··কে যথাক্রমে P, Q, R···ইত্যাদি বিন্দুতে ছেদ করে। OA এবং OB যোগ কর। সমতল OAB কে বর্দ্ধিত করিলে সরল রেখা OPQR···তাহার উপর থাকিবে। যেহেতু AB এবং CD সমান্তরাল, সুতরাং তাহারা সামতলিক এবং এই সমতলের অবস্থিতি নির্দ্দিষ্ট। এই সমতল A, B এবং Q এর মধ্যগামী এবং এই বিন্দু তিনটি অসমরেখ। অতএব A, B এবং Q এর মধ্য দিয়া একটি নির্দ্দিষ্ট সমতল আঁকা যায়। সুতরাং O, A এবং

B এর মধ্যগামী সমতল ও AB এবং CD এর মধ্যগামী সমতল অভিন্ন। অতএব O,A এবং B এর মধ্যগামী সমতল CD এর মধ্য দিয়া যায়। এইভাবে প্রমাণ করা যায় যে, উহা EF,…ইত্যাদির মধ্য দিয়াও যাইবে।

অতএব, AB, CD, EF,…ইত্যাদি সামতলিক।

উদা: ২। তিনটি সরল রেখা যাহারা পরস্পরকে ছেদ করে না, তাহাদের ছেদ করে এমন একটি সরল রেখা আঁক।

মনে কর, AB, CD,EF তিনটি সরল রেখা যাহারা পরস্পরকে ছেদ করে না। AB সরল রেখার মধ্য দিয়া একটি সমতল ABO আঁক এবং মনে কর উহা CD এবং EF কে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করে। P, Q যোগ কর। যেহেতু P এবং Q বিন্দুদ্বয় সমতল AOB এর উপর আছে, সুতরাং PQ সরল রেখাটিও এই সমতলের উপর আছে। আবার AB সরল রেখাটিও এই সমতলের উপর আছে, সুতরাং PQ এবং AB সমান্তরাল হইবে অথবা পরস্পরকে ছেদ করিবে। যদি ছেদ করে তবে ইহাই নির্ণেয় সরল রেখা।

প্রশ্নমালা ১

১। একটি প্রদত্ত বিন্দুগামী এবং একটি প্রদত্ত সরল রেখাকে ছেদকারী সরল রেখাসমূহ সামতলিক।

২। পরস্পর-ছেদী সরল রেখা সমূহ সমবিন্দু না হইলে সামতলিক হইবে।

৩। দুইটি প্রদত্ত অসামতলিক সরল রেখাকে যে সরল রেখাসমূহ ছেদ করে, তাহারা অসামতলিক।

৪। প্রদত্ত বিন্দুগামী একটি সরল রেখাকে একটি প্রদত্ত সরল রেখার উপর দিয়া সরাইতে থাকিলে সঞ্চারপথ একটি সমতল হইবে।

৫। একটি প্রদত্ত বিন্দুর মধ্য দিয়া একটি সরল রেখা আঁক যাহা দুইটি অ-সামতলিক সরল রেখাকে ছেদ করে।

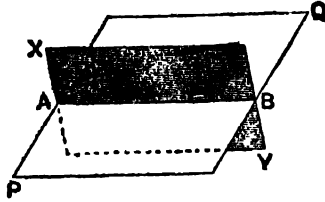
৬। তিনটি বা ততোধিক সমবিন্দু সরল রেখা যদি একটি প্রদত্ত সরল রেখাকে ছেদ করে, তবে তাহারা সামতলিক হইবে।

৭। যদি কোন চতুর্ভুজের কর্ণসমূহ পরস্পরকে ছেদ করে তবে তাহার ভুজ ও কর্ণসমূহ সামতলিক হইবে।

৮। প্রদত্ত সরল রেখার উপর তাহার বাহিরের কোন প্রদত্ত বিন্দু হইতে লম্ব আঁক।

উপপাদ্য ২

দুইটি পরস্পর-ছেদী সমতলের ছেদরেখা একটি সরল রেখা এবং তাহার বাহিরের কোন বিন্দুতে তাহারা পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে না।

[Two intersecting planes cut one another in a straight line and in no point outside it]

মনে কর, PQ এবং XY দুইটি পরস্পর-ছেদী সমতল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে তাহারা একটি সরল রেখাতে পরস্পরকে ছেদ করে এবং তাহার বহির্ভূত কোন বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

মনে কর, সমতল দুইটি পরস্পরকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে, সরল রেখা AB উভয় সমতলের উপর সম্পূর্ণভাবে আছে। অতএব সমতলদ্বয় পরস্পরকে AB সরল রেখায় ছেদ করে।

পুনরায় যেহেতু, উভয় সমতলই AB সরল রেখার মধ্যগামী, সুতরাং তাহারা AB এর বহির্ভূত কোন বিন্দুর মধ্য দিয়া যাইতে পারে না। কারণ তাহা হইলে উভয় সমতলই এক হইয়া যাইবে; যেহেতু একটি সরল রেখা এবং তাহার বহির্ভূত বিন্দুর মধ্য দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতলই আঁকা সম্ভব। কিন্তু ইহা প্রকল্প বিরুদ্ধ। অতএব AB সরল রেখার বহির্ভূত কোন বিন্দুতে সমতলদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে না।

অনুসিদ্ধান্ত: যদি দুইটি সমতলের একটি বিন্দু সাধারণ হয়, তবে অসংখ্য বিন্দু সাধারণ হইবে।

টীকা ঃ এই উপপাদ্য হইতে দেখা যাইতেছে যে (ক) যদি তিনটি বা ততোধিক সমবিন্দু সরল রেখা একটি প্রদত্ত সরল রেখাকে ছেদ করে, তবে তাহারা সামতলিক হইবে; (খ) যদি তিনটি বা ততোধিক সমান্তরাল সরল রেখা একটি প্রদত্ত সরল রেখাকে ছেদ করে, তবে তাহারা সামতলিক হইবে।

সমতল সৃষ্টি ঃ তিন রকম ভাবে একটি সমতল উৎপন্ন হইতে পারে,

(ক) প্রদত্ত বিন্দুগামী একটি সরল রেখাকে একটি প্রদত্ত সরল রেখার উপর দিয়া সরাইতে থাকিলে;

(খ) দুইটি পরস্পর-ছেদী অথবা সমান্তরাল প্রদত্ত সরল রেখার উপর দিয়া একটি সরল রেখাকে সরাইতে থাকিলে;

(গ) একটি প্রদত্ত সরল রেখার উপর দিয়া নিজের সমান্তরাল করিয়া একটি সরল রেখাকে সরাইতে থাকিলে।

শূন্যস্থ ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ (Triangles and quadrilaterals in space) ঃ

ত্রিভুজ মাত্রই সামতলিক কিন্তু চতুর্ভুজের ভুজসমূহ সামতলিক নাও হইতে পারে।

একটি সামতলিক চতুর্ভুজকে তাহার যে-কোন কর্ণের উপর দিয়া মুড়িলেই তাহার বাহুসমূহ আর সামতলিক থাকে না। এক্ষেত্রে চতুর্ভুজকে অসামতলিক (**skew or gauche**) বলা হয়। ইহার দুইটি সন্নিহিত বাহু এক সমতলে এবং অপর দুইটি সন্নিহিত বাহু আর এক সমতলে থাকে।

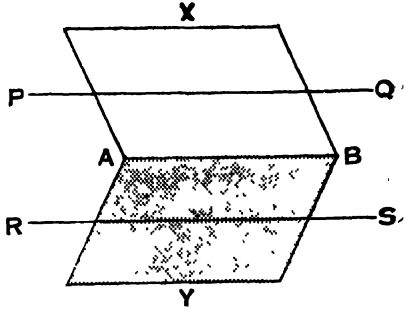
উদাহরণমালা

উদা ঃ ১। দুইটি সমান্তরাল সরল রেখার প্রত্যেকটির মধ্য দিয়া একটি করিয়া সমতল আঁকা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে তাহারা পরস্পরকে প্রদত্ত সরল রেখাদ্বয়ের সমান্তরাল আর একটি সরল রেখায় ছেদ করিবে।

মনে কর PQ এবং RS দুইটি সমান্তরাল সরল রেখা।

PQ এর মধ্য দিয়া X এবং RS এর মধ্য দিয়া Y সমতল আঁকা হইয়াছে। মনে কর তাহারা পরস্পরকে AB সরল রেখায় ছেদ করে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AB এবং PQ সমান্তরাল।

RS সরল রেখাটি Y সমতলের উপর অবস্থিত এবং PQ, RS এর সমান্তরাল; সুতরাং PQ সমতল Y এর সমান্তরাল।

পুনরায় যেহেতু, PQ এর মধ্য দিয়া সমতল X আঁকা হইয়াছে এবং এই সমতল Y সমতলকে AB সরল রেখায় ছেদ করিতেছে, অতএব AB এবং PQ সমান্তরাল।

প্রশ্নমালা ২

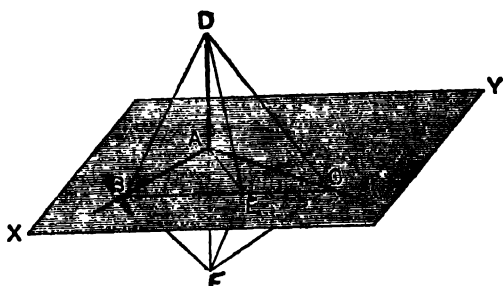
১। প্রমাণ কর যে, তিনটি সমতলের (সমরেখ নহে) ছেদরেখা তিনটি সম-বিন্দু।

২। দুইটি পরস্পর-ছেদী সরল রেখা উভয়ই অন্য একটি সরল রেখার সমান্তরাল হইতে পারে না।

৩। যদি দুইটি সমতল সমান্তরাল হয়, তবে তাহাদের ছেদরেখাদ্বয় অন্য একটি সমতলের সহিত সমান্তরাল হইবে।

উপপাদ্য ৩

যদি একটি সরল রেখা দুইটি পরস্পর-ছেদী সরল রেখার ছেদ-বিন্দুতে উভয়ের উপর লম্ব হয়, তবে তাহাদের মধ্যগামী সমতলের উপরও লম্ব হইবে।

[**If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, it is also perpendicular to the plane in which they lie.**]

মনে কর AB এবং AC দুইটি পরস্পর-ছেদী সরল রেখা এবং DA তাহাদের ছেদ-বিন্দু A তে উভয়ের উপর লম্ব। মনে কর, সমতল XY সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যগামী।

প্রমাণ করিতে হইবে যে DA, সমতল XY এর উপর লম্ব।

XY সমতলের উপর A বিন্দুর মধ্য দিয়া যে-কোন সরল রেখা AE আঁক। সেই সমতলের উপরই একটি সরল রেখা BE আঁক যাহা AB, AE এবং AC কে যথাক্রমে B, E এবং C বিন্দুতে ছেদ করে।

DA কে সমতলের অপর দিকে F পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর এবং AF = AD কাটিয়া লও।

DB, DE, DC এবং FB, FE, FC যোগ কর।

BAD এবং BAF ত্রিভুজদ্বয়ে

যেহেতু AB, DF এর লম্ব দ্বিখণ্ডক ; সুতরাং BD = BF.

এবং $\angle DAB = \angle FAB =$ এক সমকোণ ;

অনুরূপ কারণে $CD = CF$.

তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় BDC এবং BFC সর্ব্বসম।

এখন যদি BC কে অক্ষ ধরিয়া ত্রিভুজ BFC কে ঘোরান হয়, তবে যখন F বিন্দু BDC ত্রিভুজের সমতলে আসিবে, তখন তাহা D বিন্দুর সহিত মিশিয়া যাইবে। সেই সঙ্গে ত্রিভুজদ্বয়েরও সমাপতন ঘটিবে।

অতএব EF এবং ED এক হইয়া যাইবে ; অর্থাৎ $EF = ED$.

এখন DAF এবং FAE ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

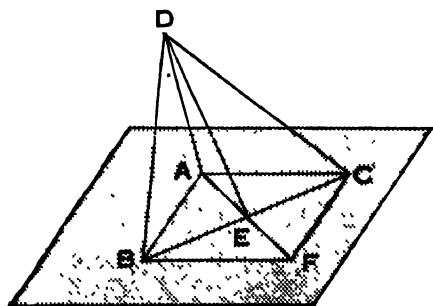
$DA = FA$, $DE = FE$ এবং AE সাধারণ বাহু ;

অতএব ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম ; সুতরাং $\angle DAE = \angle FAE =$ এক সমকোণ।

তাহা হইলে DA, XY সমতলস্থ এবং A বিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখা AE এর উপর লম্ব।

অতএব DA, AB এবং AC এর মধ্যগামী XY সমতলের উপর লম্ব।

বিকল্প প্রমাণ :

মনে কর AD পরস্পর-ছেদী সরল রেখাদ্বয় AB এবং AC এর উপর A বিন্দুতে লম্ব। মনে কর সমতল XY এই দুইটি সরল রেখার মধ্যগামী। A বিন্দুর মধ্য দিয়া এই সমতলে যে-কোন একটি সরল রেখা AF আঁক ; এবং F এর মধ্য দিয়া FC এবং FB যথাক্রমে AB এবং AC এর সমান্তরাল করিয়া আঁক। তাহা হইলে ABFC একটি সামান্তরিক যাহার কর্ণদ্বয় AF এবং BC পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করিতেছে।

সুতরাং BC, E বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইতেছে।

এখন BDC ত্রিভুজের ভূমি BC, E বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে ;

সুতরাং $DB^2+DC^2=2BE^2+2DE^2$.

কিন্তু $\angle DAB$ এবং $\angle DAC$ প্রত্যেকটিই সমকোণ,

সুতরাং $DB^2=DA^2+AB^2$, এবং $DC^2=DA^2+AC^2$

অতএব $2DA^2+AB^2+AC^2=2BE^2+2DE^2$

পুনরায়, BAC ত্রিভুজের ভূমি BC, E বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে ;

সুতরাং $AB^2+AC^2=2BE^2+2AE^2$

অতএব, $2DA^2+2BE^2+2AE^2=2BE^2+2DE^2$

অর্থাৎ $DA^2+AE^2=DE^2$

সুতরাং $\angle DAE=$ এক সমকোণ ;

অর্থাৎ DA, XY সমতলস্থ এবং A বিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখা AE এর উপর লম্ব।

অতএব DA, AB এবং AC এর মধ্যগামী XY সমতলের উপর লম্ব।

উদাহরণমালা

উদা: ১। দুইটি প্রদত্ত বিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী কোন বিন্দুর শূন্যস্থ সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1939,'47.]

মনে কর প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় A এবং B.

A, B যোগ কর এবং ইহার লম্ব দ্বিখণ্ডক আঁক। এই দ্বিখণ্ডকের মধ্য দিয়া এবং AB সরল রেখার উপর লম্ব একটি সমতল আঁক। ইহাই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

মনে কর AB এর মধ্যবিন্দু O এবং P, সঞ্চারপথের উপর যে-কোন একটি বিন্দু।

PA এবং PB যোগ কর। তবে ত্রিভুজ APB সামতলিক।

POA এবং POB ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম, কারণ AO = OB, PO সাধারণ বাহু এবং ∠POA = ∠POB = এক সমকোণ।

অতএব PA = PB.

উদা: ২। তিনটি প্রদত্ত অ-সমরেখ বিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী কোন বিন্দুর শূন্যস্থ সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1941]

মনে কর, A, B এবং C তিনটি প্রদত্ত অ-সমরেখ বিন্দু। A, B হইতে সমদূরবর্ত্তী বিন্দুসমূহ A, B এর সংযোগের লম্ব দ্বিখণ্ডকের মধ্যগামী এবং AB এর উপর লম্ব সমতলের উপর অবস্থিত। তেমনই, B, C হইতে সমদূরবর্ত্তী বিন্দুসমূহ B, C এর সংযোগের লম্ব দ্বিখণ্ডকের মধ্যগামী এবং BC এর উপর লম্ব সমতলের উপর অবস্থিত।

সুতরাং A, B এবং C হইতে সমদূরবর্ত্তী বিন্দুসমূহ এই দুইটি সমতলের ছেদরেখার উপর অবস্থিত।

অতএব এই ছেদ রেখাটিই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

প্রশ্নমালা ৩

১। সমতলস্থ অথবা বহিঃস্থ একটি প্রদত্ত বিন্দু হইতে সমতলের উপর একটি এবং কেবলমাত্র একটি লম্ব আঁকা যায়।

২। শূন্যস্থ একটি বিন্দুর মধ্য দিয়া তিনটি সরল রেখা এমনভাবে আঁকা যায়, যাহাতে প্রত্যেকটি অপর দুইটির উপর লম্ব হইবে।

৩। কেন্দ্রের মধ্য দিয়া বৃত্তের সমতলের উপর লম্ব আঁকিলে পরিধিস্থ প্রত্যেক বিন্দু লম্বস্থ যে-কোন বিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী।

৪। চারিটি অ-সামতলিক প্রদত্ত বিন্দু হইতে (যাহার কোনও তিনটি বিন্দু সমরেখ নহে), শূন্যস্থ একটি এবং কেবলমাত্র একটি বিন্দু সমদূরবর্ত্তী।

৫। দুইটী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের (যাহারা এক সমতলস্থ নহে) ভূমি সাধারণ; প্রমাণ কর যে, ভূমির মধ্যবিন্দু এবং শীর্ষ দুইটির মধ্যগামী সমতলের উপর এই সাধারণ ভূমিটি লম্ব।

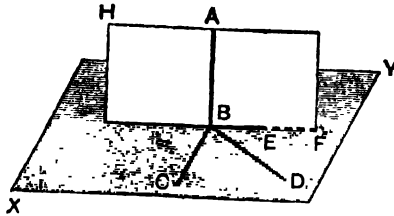
৬। শূন্যস্থ যে-কোন একটি বিন্দু একটি সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি কৌণিক বিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী; প্রমাণ কর যে, এই বিন্দু এবং অতিভুজের মধ্য-বিন্দুর সংযোগ ত্রিভুজতলের উপর লম্ব।

৭। যদি AB কোন সমতলের উপর লম্ব হয়, এবং যদি লম্বের পাদবিন্দু B হইতে সমতলস্থ যে-কোন সরল রেখা CF এর উপর BE লম্ব টানা হয়, প্রমাণ কর যে, AE এবং BE এর মধ্যগামী সমতলের উপর CE লম্ব হইবে।

[কঃ বিঃ 1950.]

উপপাদ্য ৪

একটি প্রদত্ত সরল রেখার উপর রেখাস্থ একটি প্রদত্ত বিন্দুতে অঙ্কিত লম্বসমূহ সামতলিক।

[**All straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point are coplanar.**]

মনে কর, প্রত্যেকটি সরল রেখা BC, BD, BE সরল রেখা AB এর উপর B বিন্দুতে লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, BC, BD, BE সামতলিক।

যে-কোন দুইটি পরস্পরছেদী সরল রেখার মধ্য দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল আঁকা যায়। মনে কর BC এবং BD এর মধ্য দিয়া XY সমতল এবং BA এবং BE এর মধ্য দিয়া HF সমতল আঁকা হইয়াছে।

মনে কর এই দুইটি সমতল পরস্পরকে BF সরল রেখায় ছেদ করে।

এখন যেহেতু BA, BC এবং BD এর উপর লম্ব, সুতরাং তাহাদের মধ্যগামী XY সমতলের উপরও লম্ব ;

অতএব সেই সমতলস্থ সরল রেখা BF যাহা BA কে B বিন্দুতে ছেদ করে, তাহার উপরও লম্ব।

অর্থাৎ $\angle ABE = \angle ABF$ = এক সমকোণ এবং উভয় কোনই HF সমতলের উপর অবস্থিত ;

সুতরাং BE এবং BF এর সমাপতন ঘটিবে।

অতএব, BC, BD, BE সামতলিক ; তিনটাই XY সমতলের উপর অবস্থিত।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি একটি সমকোণকে একটি বাহুর উপর ঘোরান হয়, তবে অপর বাহু একটি সমতল উৎপন্ন করে।

উদাহরণমালা

উদা ঃ ১। প্রমাণ কর যে তিনটির অধিক সমবিন্দু এবং পরস্পরের উপর লম্ব সরল রেখা থাকিতে পারে না। [কঃ বিঃ 1932, '36, '48.]

মনে কর OA, OB, OC তিনটি পরস্পরের উপর লম্ব সরল রেখা O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। যদি সম্ভব হয়, অন্য একটি সরল রেখা OD আঁক যাহাতে OA, OB, OD পরস্পরের উপর লম্ব হয়।

যেহেতু OC, OA এবং OB এর উপর লম্ব, সুতরাং তাহাদের মধ্যগামী সমতলের উপরও লম্ব।

তেমনই, যেহেতু OD, OA এবং OB এর উপর লম্ব, সুতরাং তাহাদের মধ্য-গামী সমতলের উপরও লম্ব।

কিন্তু OA এবং OB এর মধ্য দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল আঁকা সম্ভব।

সুতরাং একই সমতলের উপর একই বিন্দুতে দুইটি ভিন্ন লম্ব OC এবং OD রহিয়াছে, যাহা অসম্ভব।

অতএব OC এবং OD অভিন্ন হইবে ;

অর্থাৎ তিনটির অধিক সমবিন্দু এবং পরস্পরের উপর লম্ব সরল রেখা থাকিতে পারে না।

উদা ঃ ২। প্রমাণ কর যে একটি সমতলের উপর একটি বিন্দু নির্ণয় করা যায়, যাহা সমতলের বহিঃস্থ তিনটি বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী। কোন ক্ষেত্রে ইহা সম্ভব হয় না ? [কঃ বিঃ 1933.]

মনে, কর XY প্রদত্ত সমতল এবং A, B, C ইহার বাহিরে তিনটি বিন্দু। AB এর মধ্যবিন্দু দিয়া AB এর উপর লম্ব একটি সমতল আঁক। এই সমতলস্থ প্রত্যেক বিন্দু A এবং B হইতে সমদূরবর্ত্তী। পুনরায় BC এর মধ্যবিন্দু দিয়া BC এর উপর লম্ব একটি সমতল আঁক। এই সমতলস্থ প্রত্যেক বিন্দু B এবং C হইতে সমদূরবর্ত্তী। এই দুইটি সমতল পরস্পরকে একটি সরল রেখাতে ছেদ করে; এই সরল রেখাস্থ প্রত্যেক বিন্দু A, B এবং C হইতে সমদূরবর্ত্তী। মনে কর এই সরল রেখা XY সমতলকে D বিন্দুতে ছেদ করে। তবে D নির্ণেয় বিন্দু।

যদি এই সরল রেখা XY সমতলের সমান্তরাল হয় তবে তাহারা পরস্পরকে ছেদ করিবে না, সুতরাং D বিন্দু পাওয়া যাইবে না।

প্রশ্নমালা ৪

১। উল্লম্বস্থ একটি প্রদত্ত বিন্দুর মধ্য দিয়া কয়টি অনুভূমিক সরল রেখা আঁকা যায় ?

২। ভূমিকে অক্ষ ধরিয়া যদি একটি ত্রিভুজকে ঘোরান হয়, তবে শীর্ষের সঞ্চারপথ বৃত্ত হইবে।

৩। প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত কোন একটি বিন্দু হইতে সমান্তরাল সরল রেখার গোষ্ঠীর উপর লম্ব টানিলে, লম্বসমূহ সামতলিক হইবে।

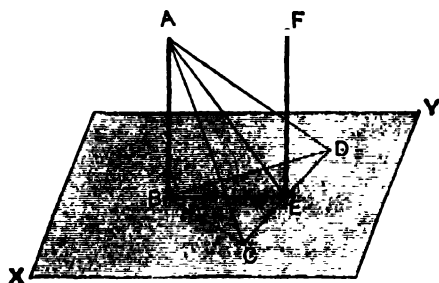
৪। শূন্যস্থ প্রদত্ত একটি সরল রেখার উপর একটি বিন্দু নির্ণয় করা যায়, যাহা এই রেখার বহিঃস্থ দুইটি বিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী হইবে। কোন্ ক্ষেত্রে ইহা সম্ভব হয় না ?

৫। যদি কোন সমতলগোষ্ঠী পরস্পরকে একটি সরল রেখায় ছেদ করে এবং এই রেখাস্থ যে-কোন বিন্দুর মধ্য দিয়া সমতলসমূহের উপর লম্ব আঁকা যায়, তবে লম্বসমূহ সামতলিক হইবে এবং এই সমতল ছেদরেখার উপর লম্ব হইবে।

৬। দুইটি সরল রেখা AB এবং CD পরস্পরকে O বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করে। OP উভয়ের উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, (ক) PA = PB ; (খ) PC = PD.

উপপাদ্য ৫

দুইটি সমান্তরাল সরল রেখার একটি যদি কোন সমতলের উপর লম্ব হয়, তবে অন্যটিও সেই সমতলের উপর লম্ব হইবে।

[If two straight lines are parallel, and if one of them is perpendiclar to a plane, then the other also is perpendicular to the same plane.]

মনে কর, AB এবং FE দুইটি সমান্তরাল সরল রেখা, যাহারা কোন একটি সমতল XY কে যথাক্রমে B এবং E বিন্দুতে ছেদ করিতেছে ; এবং মনে কর AB এই সমতলের উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, FEও সমতল XY এর উপর লম্ব।

AE এবং BE যোগ কর ; E এর মধ্য দিয়া XY সমতলে BE এর উপর লম্ব CED সরল রেখা আঁক এবং EC ও ED একই দৈর্ঘ্যের সমান করিয়া কাটিয়া লও।

AC, AD এবং BC, BD যোগ কর।

যেহেতু, EB, CD এর লম্বদ্বিখণ্ডক, অতএব BC = BD.

এখন ABC এবং ABD ত্রিভুজের,

BC = BD, AB সাধারণ বাহু, এবং ∠ABC = ∠ABD = একসমকোণ ;

অতএব ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম ; সুতরাং AC = AD.

পুনরায় ACE এবং ADE ত্রিভুজে,

CE = DE, AE সাধারণ বাহু, এবং AC = AD ;

অতএব ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম ; সুতরাং ∠AEC = ∠AED = একসমকোণ।

তাহা হইলে CE, EA এর উপর লম্ব ; আবার CE, EB এর উপর লম্ব ;

সুতরাং CE, EA এবং EB এর মধ্যগামী সমতলের উপর লম্ব।

এখন FE এই সমতলস্থ সরল রেখা ; যেহেতু EA এবং EB দুইটি প্রদত্ত সরল রেখা AB এবং FE এর মধ্যগামী সমতলের উপর অবস্থিত ;

সুতরাং CE, EF এর উপর লম্ব।

পুনরায় যেহেতু AB এবং FE সমান্তরাল, এবং কল্পনানুসারে ABE সমকোণ,

সুতরাং ∠FEBও সমকোণ।

অতএব, FE, EB এবং EC উভয়ের উপরই লম্ব, অর্থাৎ উভয়ের মধ্যগামী XY সমতলের উপর লম্ব।

বিপরীত উপপাদ্য

যদি দুইটি সরল রেখা (AB এবং FE) উভয়ই একই সমতলের (XY) উপর লম্ব হয়, তবে তাহারা পরস্পরের সমান্তরাল হইবে।

[**If two straight lines are both perpendicular to the same plane, they are parallel to one another.**]

পূর্ব্বের মতই প্রমাণ করা যায় যে, CE, EA এবং EB এর মধ্যগামী সমতলের উপর লম্ব ;

এবং কল্পনানুসারে CE, EF এর উপর লম্ব ; সুতরাং EF, EA এবং EB এর মধ্যগামী সমতলের উপর লম্ব।

কিন্তু এই সমতলের উপর ABও লম্ব ; সুতরাং AB এবং FE সামতলিক।

পুনরায় কল্পনানুসারে ∠ABE এবং ∠FEB উভয়ই সমকোণ,

অতএব AB এবং FE সমান্তরাল।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি AB, সমতল XY এর উপর লম্ব হয় এবং যদি লম্বের পাদদেশ B বিন্দুর মধ্য দিয়া সেই সমতলস্থ যে-কোন সরল রেখা CD এর উপর BE লম্ব হয়, তবে AE এর সংযোগ-রেখাও CD এর উপর লম্ব হয়।

অঙ্কন এবং প্রমাণ উপপাদ্য (৫) এর অনুরূপ।

এই প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তকে "**লম্বত্রয়ের সিদ্ধান্ত**" বলা হয়।

উদাহরণমালা

উদা ঃ ১। একটি প্রদত্ত সরল রেখার সমান্তরাল শূন্যস্থ সরল রেখাসমূহ পরস্পরের সমান্তরাল। ঃ বিঃ 1922,' 29,' 35.]

মনে কর সরল রেখা AB এবং CD প্রত্যেকটিই সরল রেখা EF এর সমান্তরাল। EF এর উপর লম্ব একটি সমতল HGK আঁক, যাহা AB এবং CDকে যথাক্রমে H এবং K বিন্দুতে ছেদ করে। এখন যেহেতু AB এবং EF সমান্তরাল, সুতরাং AB ও সমতল HGK এর উপর লম্ব। অনুরূপভাবে CD ও সমতল HGK এর উপর লম্ব। যেহেতু, উভয়ই একই সমতলের উপর লম্ব, অতএব তাহারা পরস্পরে সমান্তরাল।

উদা ঃ ২। বহিঃস্থ যে-কোন বিন্দু হইতে যদি কোন সামতলিক সমান্তরাল সরল রেখার গোষ্ঠীর উপর লম্বসমূহ আঁকা হয়, তবে তাহাদের পাদবিন্দুসমূহ সমরেখ হইবে এবং এই সরল রেখা সমান্তরাল সরল রেখাসমূহের উপর লম্ব হইবে।

মনে কর AB, CD, EF,···ইত্যাদি সমান্তরাল সরল রেখাসমূহ XY সমতলের উপর অবস্থিত। মনে কর O বহিঃস্থ যে-কোন বিন্দু এবং OP, OQ, OR,··· ইত্যাদি যথাক্রমে AB, CD, EF, ··ইত্যাদির উপর লম্ব। O বিন্দুর মধ্য দিয়া সমান্তরাল রেখাসমূহের সমান্তরাল করিয়া একটি সরল রেখা GH আঁক। তাহা হইলে OP, OQ, OR,···ইত্যাদি প্রত্যেকটি GH এর উপর O বিন্দুতে লম্ব।

সুতরাং OP, OQ, OR,…ইত্যাদির মধ্য দিয়া একটি সমতল LM আঁকা যায় এবং তাহা GH এর উপর লম্ব হইবে। সমতল XY এবং LM পরস্পরকে একটি সরল রেখায় ছেদ করিবে। এখন যেহেতু OP, OQ, OR, …ইত্যাদি LM সমতলের উপর অবস্থিত, সুতরাং P, Q, R,…ইত্যাদি সমরেখ।

পুনরায় যেহেতু GH সমান্তরালগোষ্ঠী AB, CD, EF,…ইত্যাদির সমান্তরাল এবং GH সমতল LM এর উপর অবস্থিত, সুতরাং AB, CD, EF, …ইত্যাদি সমতল LM এর উপর লম্ব এবং সরলরেখা PQR…এই সমতলের উপর অবস্থিত।

অতএব সরল রেখা PQR সমান্তরালগোষ্ঠী AB, CD, EF, …ইত্যাদির উপর লম্ব।

প্রশ্নমালা ৫

১। বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি প্রদত্ত সমতলের উপর লম্ব টান। প্রমাণ কর যে, কেবলমাত্র একটি লম্ব আঁকা সম্ভব।

২। বহিঃস্থ একটি বিন্দু হইতে দুইটি পরস্পর-ছেদী সমতলের উপর লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, এই সমতল দুইটির ছেদরেখা লম্ব দুইটির মধ্যগামী সমতলের উপর লম্ব।

৩। একটি অসামতলিক চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুসমূহের মধ্যবিন্দু যোগ করিলে একটি সামতলিক সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

৪। প্রমাণ কর যে, শূন্যস্থ সমান্তরাল সরল রেখাসমূহের উপর বহিঃস্থ যে-কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বসমূহ সামতলিক এবং এই সমতল সমান্তরাল সরল-রেখাসমূহের উপর লম্ব।

৫। প্রদত্ত সরল রেখাগামী যে-কোন সমতলের উপর বহিঃস্থ একটি প্রদত্ত বিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

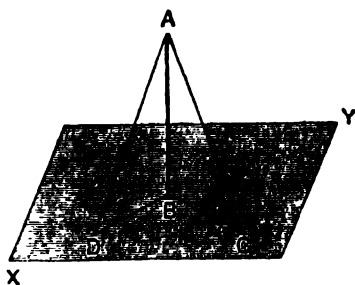
৬। বহিঃস্থ কোন বিন্দু A হইতে একটি সমতল XY এর উপর AB লম্ব আঁকা হইয়াছে এবং CD সমতলস্থ যে-কোন একটি সরল রেখা। যদি AL, CDএর উপর লম্ব হয়, প্রমাণ কর যে, BLও CDএর উপর লম্ব হইবে।

উপপাদ্য ৬

(ক) কোন সমতলের বহিঃস্থ কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সমতলের উপর যতগুলি সরল রেখা টানা যাইতে পারে, তাহাদের মধ্যে লম্ব রেখাটিই ক্ষুদ্রতম ; এবং

(খ) যতগুলি তির্য্যক রেখা টানা যাইতে পারে, তাহাদের মধ্যে সমতলের সহিত যাহাদের ছেদবিন্দু লম্বের পাদদেশ হইতে সমদূরবর্ত্তী, তাহারা দৈর্ঘ্যে সমান।

[(i) Of all straight lines drawn from an external point to a plane, the perpendicular is the shortest ; and

(ii) of obliques drawn from the given point, those which cut the plane at equal distances from the foot of the perpendicular are equal.]

(ক) মনে কর বহিঃস্থ A বিন্দু হইতে সমতল XY এর উপর AB লম্ব এবং AC যে-কোন একটি তির্য্যক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AC অপেক্ষা AB ক্ষুদ্রতর।

BC যোগ কর। এখন যেহেতু AB, XY সমতলের উপর লম্ব, সুতরাং BC এর উপরও লম্ব।

অতএব ABC ত্রিভুজের $\angle ABC$ অপেক্ষা $\angle ACB$ ক্ষুদ্রতর বলিয়া AC অপেক্ষা AB ক্ষুদ্রতর।

(খ) মনে কর AC, AD দুইটি তির্য্যক সমতল XY কে যথাক্রমে C এবং D বিন্দুতে ছেদ করে এবং BC = BD.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AC = AD.

এখন যেহেতু AB, XY সমতলের উপর লম্ব সুতরাং BC এবং BD এর উপরও লম্ব।

ABC এবং ABD ত্রিভুজের

BC = BD, AB সাধারণ বাহু, এবং ∠ABC = ∠ABD = একসমকোণ ;

সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম ;

অতএব AC = AD.

উদাহরণমালা

উদা : ১। যদি তিনটি সামতলিক বিন্দু A, B, C কোন একটি বহিঃস্থ বিন্দু O হইতে সমদূরবর্ত্তী হয়, প্রমাণ কর যে, O হইতে সমতলের উপর লম্ব টানিলে পাদবিন্দু ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র হইবে। [কঃ বিঃ 1946]

মনে কর O হইতে ABC সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু P.

এখন যেহেতু OP সমতলের উপর লম্ব, সুতরাং PA, PB, PC এর উপর লম্ব।

ত্রিভুজ OPA, OPB, OPC এর

OA = OB = OC, OP সাধারণ বাহু, এবং ∠OPA = OPB = OPC = এক সমকোণ ;

সুতরাং ত্রিভুজত্রয় সর্ব্বসম ; অতএব PA = PB = PC.

সুতরাং P ত্রিভুজ ABC এর পরিকেন্দ্র।

উদা : ২। যদি কোন প্রদত্ত সমতলস্থ ত্রিভুজের বাহুসমূহ বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী হয়, প্রমাণ কর যে, সেই বিন্দু হইতে সমতলের উপর লম্ব টানিলে পাদবিন্দু ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র অথবা বহিঃকেন্দ্র হইবে।

মনে কর ABC, XY সমতলস্থ একটি ত্রিভুজ এবং O বহিঃস্থ যে-কোন একটি বিন্দু। BC, CA এবং AB বাহুসমূহের উপর O বিন্দু হইতে যথাক্রমে OD, OE এবং OF লম্ব টান ; কল্পনানুসারে OD = OE = OF.

O হইতে XY সমতলের উপর ON লম্ব টান ; তাহা হইলে ND = NE = NF এবং ইহারা যথাক্রমে BC, CA এবং AB এর উপর লম্ব।

সুতরাং Nকে কেন্দ্র ধরিয়া ND ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁকিলে, তাহা ত্রিভুজের বাহুসমূহকে স্পর্শ করিবে।

অতএব N ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র অথবা বহিঃকেন্দ্র।

প্রশ্নমালা ৬

১। কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে কোন সমতলের উপর সমদৈর্ঘ্যের তির্য্যক সমূহ আঁকিলে তাহাদের ছেদ বিন্দুসমূহ সেই বিন্দু হইতে সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী।

২। কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে কোন সমতলের উপর অঙ্কিত সমদীর্ঘ তির্যক-সমূহের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৩। তিনটি সমবিন্দু কিন্তু অসামতলিক সরল রেখার উপর সমভাবে নত একটি সরল রেখা আঁক।

৪। কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে কোন সমতলের উপর তির্য্যকসমূহ আঁকিলে, তির্য্যকের ছেদবিন্দু প্রদত্ত বিন্দু হইতে সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর যত নিকটতর হইবে, দৈর্ঘ্যে ততই ক্ষুদ্রতর হইতে থাকিবে।

৫। প্রমাণ কর যে, কোন সমতলস্থ সরল রেখাসমূহ বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী হইলে তাহারা একটি বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

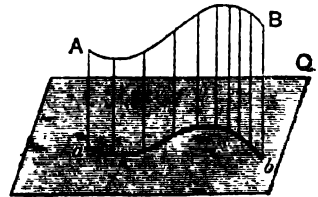
৬। বহিঃস্থ একটি বিন্দু হইতে সমবিন্দু এবং সামতলিক সরল রেখাসমূহের উপর অঙ্কিত লম্বসমূহের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৭। কোন সুষম বহুভুজের শীর্ষসমূহ হইতে সমদূরবর্ত্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৮। কোন সামতলিক বহুভুজের পরিলিখিত বৃত্তের কেন্দ্রের মধ্য দিয়া সমতলের উপর লম্ব আঁকিলে, লম্বস্থ যে-কোন বিন্দু বহুভুজের শীর্ষসমূহ হইতে সমদূরবর্ত্তী।

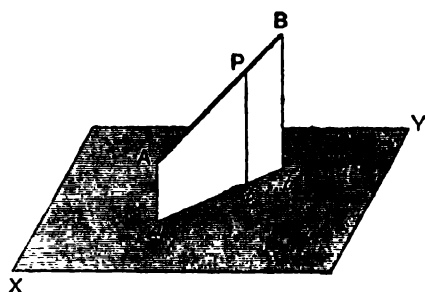
৯। XY সমতলের উপর AB একটি সরল রেখা এবং বহিঃস্থ কোন বিন্দু P হইতে PQ এই সমতলের উপর লম্ব; প্রমাণ কর যে, (ক) QR, AB এর উপর লম্ব হইলে, PR ও AB এর উপর লম্ব হইবে; (খ) PR, AB এর উপর লম্ব হইলে, QR ও AB এর উপর লম্ব হইবে। [কঃ বিঃ 1942.]

১০। প্রমাণ কর যে, (ক) দুইটি প্রদত্ত বিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী বিন্দুসমূহ সামতলিক; (খ) তিনটি অসামতলিক প্রদত্ত বিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী বিন্দুসমূহ সমরেখ; (গ) চারিটি অসামতলিক প্রদত্ত বিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী একটি মাত্র বিন্দু সম্ভব।

সংজ্ঞা : কোন রেখার বিন্দুসমূহ হইতে কোন সমতলের উপর লম্ব আঁকিলে লম্বের পাদ-বিন্দুর সঞ্চারপথকে সেই সমতলের উপর সেই **রেখার অভিক্ষেপ** (projection of a line) বলে।

পাশের ছবিতে *ab* রেখা XY সমতলের উপর AB রেখার অভিক্ষেপ।

উপপাদ্য ৭

সমতলের উপর সরল রেখার অভিক্ষেপ সরল রেখা।

(The projection of a straight line on a plane is itself a straight line.)

মনে কর AB প্রদত্ত সরল রেখা এবং XY প্রদত্ত সমতল। AB এর মধ্যে যে-কোন বিন্দু P হইতে XY এর উপর Pp লম্ব টান, যাহা সমতলকে p বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, p বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি সরল রেখা।

A এবং B হইতে XY এর উপর Aa এবং Bb লম্ব টান।

এখন Aa, Pp এবং Bb প্রত্যেকটিই XY সমতলের উপর লম্ব। সুতরাং তাহারা সমান্তরাল।

আবার যেহেতু তাহারা AB সরল রেখা দ্বারা ছেদিত হয়, সুতরাং তাহারা সামতলিক।

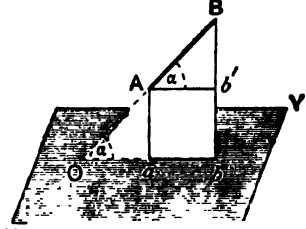
Ab এবং XY সমতল দুইটি পরস্পরকে একটি সরল রেখায় ছেদ করে এবং এই সরল রেখাটি ab; সুতরাং p সরল রেখা ab এর উপর অবস্থিত।

কিন্তু p সরল রেখার AB এর যে-কোন বিন্দু P এর অভিক্ষেপ;

অতএব সরল রেখা AB এর অভিক্ষেপ সরল রেখা ab.

অনুসিদ্ধান্ত ঃ (ক) সমতলের উপর সরল রেখার নতি, সরল রেখা ও সমতলের উপর তাহার অভিক্ষেপের মধ্যস্থিত কোণের সমান।

(খ) অভিক্ষেপ ও সরল রেখার দৈর্ঘ্যের অনুপাত তাহাদের মধ্যস্থিত কোণের কোসাইনের সমান।

(ক) মনে কর XY সমতলের উপর AB সরল রেখার অভিক্ষেপ ab ; তবে AB এবং ab সামতলিক।

মনে কর AB এবং ab (প্রয়োজন হইলে বর্দ্ধিত করিলে) পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে XY এর উপর AB এর নতি B O b কোণের সমান।

(খ) মনে কর AB সরল রেখা XY সমতলের সহিত α কোণ করে।

ab এর সমান্তরাল করিয়া Ab' আঁক এবং মনে কর ইহা Bb কে b' বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহা হইলে, $\angle BAb' =$ অনুরূপ $\angle BOb = \alpha$.

সমকোণী ত্রিভুজ $Bb'A$ হইতে পাওয়া যায়, $\frac{Ab'}{AB} = \cos\alpha$

কিন্তু $Ab' = ab$,

অতএব $\frac{ab}{AB} = \cos\alpha$.

[টীকা : যখন $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, সুতরাং $ab = AB$; এবং যখন $\alpha = 90°$, $\cos\alpha = 0$, সুতরাং $ab = 0$.]

উদাহরণমালা

উদা ঃ ১। কোন সমতলের বহিঃস্থ কোন সরল রেখা যদি সমতলস্থ কোন সরল রেখার সমান্তরাল হয়, তবে তাহা সমতলেরও সমান্তরাল হইবে।

[কঃ বিঃ 1931, '33.]

মনে কর AB সরল রেখা, XY সমতলস্থ CD সরল রেখার সমান্তরাল। AB এবং CDএর মধ্য দিয়া একটি সমতল আঁকা যায় এবং ইহা XY সমতলকে CDতে ছেদ করে। যদি AB, XY সমতলকে কখনও ছেদ করে, তবে ছেদবিন্দু CD এর উপর থাকিবে।

কিন্তু কল্পনানুসারে ইহা অসম্ভব, কারণ AB এবং CD সমান্তরাল।

অতএব AB কখনও XY সমতলকে ছেদ করিতে পারে না; অর্থাৎ ইহা সমতলেরও সমান্তরাল।

উদা: ২। যদি একটি সরল রেখা কোন সমতলের সমান্তরাল হয়, তবে সমতলের উপর তাহার অভিক্ষেপেরও সমান্তরাল হইবে। [কঃ বিঃ 1944.]

মনে কর AB সরল রেখা XY সমতলের সমান্তরাল এবং সমতলের উপর তাহার অভিক্ষেপ CD, তাহা হইলে AB এবং CD সামতলিক।

AC এবং BD যোগ কর। $\angle ACD = \angle BDC =$ এক সমকোণ।

এখন যেহেতু AB সমতল XY এর সমান্তরাল এবং AC ও BD এই সমতলের উপর লম্ব,

সুতরাং $\angle CAB = \angle DBA =$ এক সমকোণ।

অতএব ABCD একটি আয়তক্ষেত্র; অর্থাৎ AB এবং CD সমান্তরাল।

প্রশ্নমালা ৭

১। কোন সরল রেখা তাহার অভিক্ষেপ অপেক্ষা ক্ষুদ্র হইতে পারে না।

২। সমদৈর্ঘ্যের সমান্তরাল সরল রেখাসমূহের যে-কোন সমতলের উপর অভিক্ষেপসমূহ সমদৈর্ঘ্য এবং সমান্তরাল।

৩। যে-কোন সমতলের উপর কোন সরল রেখার মধ্যবিন্দুর অভিক্ষেপ সেই সরল রেখার অভিক্ষেপের মধ্যবিন্দু।

৪। দুইটি পরস্পর-ছেদী সমতলের উপর যদি কোন রেখার দুইটি অভিক্ষেপই সরল রেখা হয়, তবে রেখাটি সরল রেখা।

৫। বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন সমতলের উপর সমান তির্য্যকসমূহের অভিক্ষেপ সমান।

৬। একটি সরল রেখা কোন সমতলের উপর তাহার অভিক্ষেপের সহিত যে কোণ করে তাহা সমতলস্থ যে-কোন অন্য সরল রেখার সহিত উৎপন্ন কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। [কঃ বিঃ 1931]

৭। দুইটি সমান্তরাল সরল রেখার মধ্য দিয়া যথাক্রমে দুইটি সমতল আঁকিলে তাহাদের ছেদরেখা উভয় সরল রেখার সমান্তরাল একটি সরল রেখা।

[কঃ বিঃ 1935.]

৮। যদি কোন সরল রেখা দুইটি সমতলের উভয়েরই সমান্তরাল হয়, তবে তাহাদের ছেদরেখাও সমান্তরাল হইবে। [কঃ বিঃ 1933.]

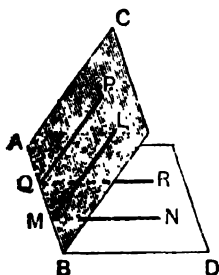
৯। প্রমাণ কর যে, একটি প্রদত্ত বিন্দুর মধ্য দিয়া দুইটি অসামতলিক সরল রেখার উভয়েরই সমান্তরাল একটি সমতল আঁকা যায়। [কঃ বি : 1931.]

১০। যদি দুইটি অসমান্তরাল সরল রেখা পরস্পরকে ছেদ না করে, তবে উভয়ের উপর লম্ব একটি সরল রেখা আঁকা যায় এবং ইহাই উহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম ব্যবধান।

দ্বিতীয় অধ্যায়

দ্বিতল এবং ঘন কোণ (Dihedral and Solid angles)

(ক) দ্বিতল কোণ

সংজ্ঞা : দুইটি সমতল ছেদরেখাতে মিলিত হইলে **দ্বিতলকোণ** উৎপন্ন করে। ছেদরেখাস্থ যে-কোন বিন্দুর মধ্য দিয়া প্রত্যেক সমতলে ছেদরেখার উপর এক একটি লম্ব টানিলে উহাদের মধ্যস্থিত সমতলীয় কোণ দ্বিতল কোণের পরিমাপক।

পার্শ্বস্থ ছবিতে AD এবং BC দুইটি সমতল এবং AB উহাদের ছেদরেখা। AB রেখাস্থ যে-কোন বিন্দু Q এর মধ্য দিয়া QR এবং QP ছেদরেখা AB এর উপর লম্ব টানা হইয়াছে। QR এবং QP যথাক্রমে AD এবং BC সমতলে অবস্থিত।

তাহা হইলে সমতল দুইটির মধ্যস্থিত দ্বিতলকোণ = $\angle PQR$.

AB রেখাস্থ অন্য যে-কোন বিন্দু M লইলে এবং পূর্ব্বের মত MN এবং ML ছেদরেখা AB এর উপর AD এবং BC সমতলস্থ লম্ব টানিলে, দ্বিতলকোণ $= \angle LMN$.

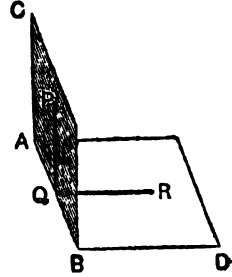
যেহেতু PQ এবং LM সমান্তরাল, আবার QR এবং MN সমান্তরাল, সুতরাং $\angle PQR = \angle LMN$.

পুনরায় যেহেতু AB, PQ এবং QR উভয়ের উপরই লম্ব, সুতরাং উহাদের মধ্যগামী সমতলের উপরও লম্ব। অতএব দুইটি সমতল AD এর BC এর মধ্যস্থিত

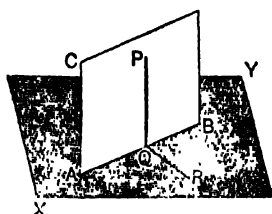
দ্বিতলকোণ, ছেদরেখা AB এর উপর লম্ব যে-কোন সমতলের সহিত প্রদত্ত সমতল-দ্বয়ের ছেদ হইতে পাওয়া যায়।

সংজ্ঞা ঃ দুইটি সমতলের মধ্যস্থিত দ্বিতল-কোণ এক সমকোণের সমান হইলে উহাদিগকে পরস্পরের উপর লম্ব বলা হয়।

ছবিতে ∠PQR এক সমকোণের সমান ;

সুতরাং সমতলদ্বয় AD এবং BC পরস্পরের উপর লম্ব।

উপপাদ্য ৮

যদি কোন সরল রেখা কোন সমতলের উপর লম্ব হয়, তবে সেই লম্বগামী যে-কোন সমতলও প্রদত্ত সমতলের উপর লম্ব হইবে।

[**If a straight line is perpendicular to a plane, then any plane passing through the perpendicular is also perpendicular to the given plane.**]

মনে কর PQ সরল রেখা XY সমতলের উপর লম্ব এবং CB, PQ এর মধ্যগামী যে-কোন সমতল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, CB সমতল XY সমতলের উপর লম্ব।

মনে কর CB এবং XY সমতলস্থ QR, সমতল দুইটির ছেদরেখা AB এর উপর লম্ব।

তাহা হইলে যেহেতু PQ, XY সমতলের উপর লম্ব, সুতরাং সমতলস্থ সরল রেখা QB এবং QR এর উপরও লম্ব।

অতএব ∠PQR এক সমকোণের সমান।

কিন্তু ∠PQR, CB এবং XY সমতল দুইটির মধ্যস্থিত দ্বিতলকোণ;

অতএব, CB সমতল XY সমতলের উপর লম্ব।

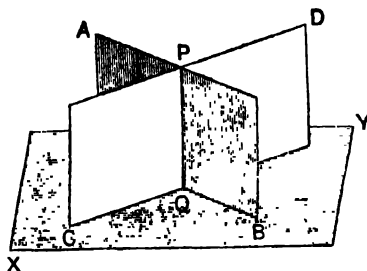
অনুসিদ্ধান্ত ঃ এই উপপাদ্য হইতে পাওয়া যায় যে,

(ক) যদি দুইটি সমতল CB এবং XY পরস্পরের উপর লম্ব হয় তবে CB সমতলস্থ এবং AB ছেদরেখার উপর লম্ব যে-কোন সরল রেখা PQ, XY সমতলের উপরও লম্ব হইবে।

(খ) যদি দুইটি সমতল CB এবং XY পরস্পরের উপর লম্ব হয় এবং প্রথম সমতলস্থ যে-কোন বিন্দু P হইতে দ্বিতীয় সমতলের উপর PQ লম্ব হয়, তবে PQ, CB সমতলে থাকিবে।

বিপরীত উপপাদ্য

যদি দুইটি পরস্পর-ছেদী সমতল উভয়ই তৃতীয় একটি সমতলের উপর লম্ব হয়, তবে তাহাদের ছেদরেখাও তৃতীয় সমতলটির উপর লম্ব হইবে।

[**If two intersecting planes are each perpendicular to a third plane, their line of section is also perpendicular to that plane.**]

মনে কর AB এবং CD সমতল দুইটি পরস্পরকে PQ সরল রেখায় ছেদ করে এবং উভয়ই XY সমতলের উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PQ, XY সমতলের উপর লম্ব।

AB এবং CD এর সাধারণ কোন বিন্দু P হইতে XY সমতলের উপর লম্ব টানিলে তাহা AB এবং CD উভয় সমতলের উপরই থাকিবে, যেহেতু তাহারা উভয়ই XY সমতলের উপর লম্ব।

অতএব এই লম্ব এবং ছেদরেখা PQ অভিন্ন ; অর্থাৎ PQ, XY সমতলের উপর লম্ব।

উদাহরণমালা

উদা ঃ ১। প্রদত্ত সমতলের উপর লম্ব এবং প্রদত্ত সমতলের বহিঃস্থ একটি সরল রেখার মধ্যগামী একটি সমতল আঁক।

মনে কর XY প্রদত্ত সমতল এবং AB প্রদত্ত সরল রেখা। AB এর উপর যে-কোন একটি বিন্দু P লও এবং XY এর উপর PQ লম্ব টান। এখন যেহেতু PQ, XY সমতলের উপর লম্ব সুতরাং PQ এর মধ্যগামী যে-কোন সমতল, XY সমতলের উপর লম্ব। অতএব দুইটি পরস্পর-ছেদী সরল রেখা AB এবং PQ এর মধ্যগামী সমতলই নির্ণেয় সমতল, যাহা XY সমতলের উপর লম্ব।

উদা ঃ ২। যদি একটি সমতল দুইটি সমান্তরাল সমতলকে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, অনুরূপ দ্বিতলকোণ দুইটি সমান। [কঃ বিঃ 1937.]

মনে কর সমতল XY দুইটি সমান্তরাল সমতল AB এবং CDকে ছেদ করে। সমতলসমূহের বাহিরে যে-কোণ একটি বিন্দু P লও। P হইতে XY সমতলের উপর PM লম্ব টান এবং AB ও CD এর উপর PQR লম্ব টান যাহা AB কে Q এবং CD কে R বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু দুইটি সমতলের মধ্যস্থিত দ্বিতলকোণ তাহাদের লম্বের মধ্যস্থিত সমতল-কোণের সমান অথবা সম্পূরক সুতরাং XY এবং CD এর অন্তঃস্থ দ্বিতলকোণ XY এবং AB এর বহিঃস্থ দ্বিতলকোণের সমান।

অতএব অনুরূপ দ্বিতলকোণ দুইটি সমান।

প্রশ্নমালা ৮

১। প্রমাণ কর যে, দুইটি পরস্পর-ছেদী সমতলের মধ্যস্থিত দ্বিতলকোণ তাহাদের লম্বের মধ্যস্থিত সমতলকোণের সমান অথবা সম্পূরক।

২। যে-কোন বিন্দু হইতে দুইটি পরস্পর-ছেদী সমতলের উপর লম্ব টানিলে, সমতলদ্বয়ের ছেদরেখা লম্বদ্বয়ের মধ্যগামী সমতলের উপর লম্ব হইবে।

৩। তিনটি পরস্পরের উপর লম্ব সনতলের ছেদরেখা তিনটি পরস্পরের উপর লম্ব।

৪। প্রদত্ত সমতলের লম্বের সমান্তরাল সমতল প্রদত্ত সমতলের উপর লম্ব।

৫। প্রদত্ত বিন্দুগামী এবং প্রদত্ত সরল রেখার সমান্তরাল করিয়া প্রদত্ত সমতলের উপর লম্ব একটি সমতল আঁক।

৬। যদি তিনটি সমতলের ছেদরেখা পরস্পরের সমান্তরাল হয় তবে যে-কোন বিন্দু হইতে সমতলসমূহের উপর লম্ব টানিলে তাহারা সামতলিক হইবে।

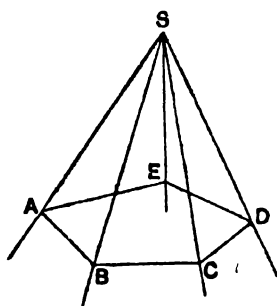
৭। যদি তিনটি সমতলের ছেদরেখা তিনটির মধ্যে দুইটি সমান্তরাল হয় তবে তৃতীয়টিও উহাদের সমান্তরাল হইবে।

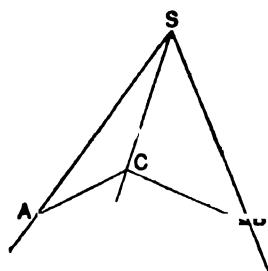
৮। প্রমাণ কর যে একটি সরল রেখা সমান্তরাল সমতলসমূহকে ছেদ করিলে তাহাদের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

৯। যদি দুইটি সমতল পরস্পরের উপর লম্ব হয়, তবে প্রত্যেক সরল রেখা যাহা একটির উপর লম্ব তাহা অপরটির সমান্তরাল হইবে অথবা সম্পূর্ণভাবে অপরটির উপর থাকিবে।

১০। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া ত্রিভুজতলের উপর লম্ব তিনটি সমতল আঁকিলে তাহারা পরস্পরকে ত্রিভুজতলের পরিকেন্দ্রের উপর লম্ব একটি সরল রেখায় ছেদ করে।

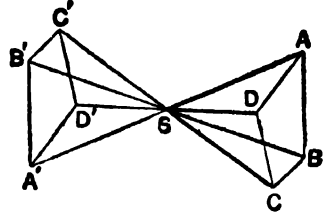
(খ) ঘনকোণ

সংজ্ঞা ঃ যখন তিন বা ততোধিক সমতল পরস্পরকে ক্রমিকভাবে (প্রথমের সহিত দ্বিতীয়, দ্বিতীয়ের সহিত তৃতীয়,···) ছেদ করে এবং ছেদরেখাসমূহ সমবিন্দু হয়, তখন সেই বিন্দুতে **ঘনকোণ** (**solid angle**) উৎপন্ন হয়। বিন্দুটিকে **শীর্ষ** (**vertex**) বলে ; দুইটি ক্রমিক অর্থাৎ সন্নিহিত সমতলের ছেদরেখাকে ঘনকোণের **প্রান্তরেখা** বা **প্রান্তিকী** (**edges**) বলে ; দুইটি সন্নিহিত সমতলের অন্তর্বর্তী কোণকে **দ্বিতলকোণ** (**dihedral angles**) বলা হয় ; এবং দুইটি ক্রমিক অন্তর্বর্তী সমতলকোণকে **তলকোণ** (**face angles**) বলা হয়।

ছবিতে সমতল ASB, BSC...ইত্যাদি ক্রমিকভাবে প্রান্তিকী SB, SC,···ইত্যাদিতে ছেদ করিয়াছে ; প্রত্যেক ছেদরেখা S বিন্দু-গামী ; সুতরাং S বিন্দুতে ঘনকোণ উৎপন্ন হইয়াছে। এই ঘনকোণকে (S, ABC···) অথবা মাত্র একটি অক্ষর S দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

তিনটি সমবিন্দু সমতল দ্বারা ঘনকোণ উৎ-পন্ন হইলে তাহাকে **ত্রিতলকোণ** (**trihedral angle**) বলে ; এবং তিনটির অধিক সমবিন্দু সমতল দ্বারা ঘনকোণ উৎপন্ন হইলে তাহাকে **বহুতলকোণ** (**polihedral angle**) বলে।

ত্রিতলকোণের ছয়টি অংশ, তিনটি দ্বিতলকোণ ও তিনটি তলকোণ।

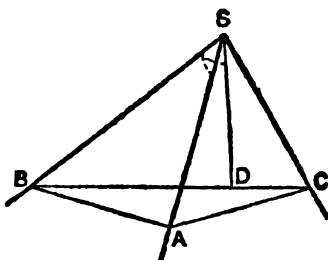
সংজ্ঞা ঃ দুইটি ঘনকোণকে সর্ব্বসম (**identically equal**) বলা হয় যখন একটির উপর অপরটির সমাপতন সম্ভব, অর্থাৎ একটিকে অপরটির সহিত ঠিক মিলাইয়া দেওয়া যায় (**exactly fitted**)। সে ক্ষেত্রে প্রথম ঘনকোণের

তলকোণসমূহ দ্বিতীয়ের অনুরূপ তলকোণসমূহের সমান ; এবং প্রথমটির দ্বিতল-কোণসমূহ **একই দিক দিয়া ঘুরিলে** দ্বিতীয়টির অনুরূপ দ্বিতলকোণসমূহের সমান। "একই দিক দিয়া ঘুরিলে" কথাটি বলা আবশ্যক নচেৎ ঘনকোণ দুইটি সমান হইলেও সর্ব্বসম হইবে না, প্রতিসম (**symmetrical**) হইবে মাত্র।

ছবিতে ঘনকোণ (S, ABCD) এবং (S, A′B′C′D′) প্রতিসম, সর্ব্বসম নহে।

যখন কোন একটি সমতল দ্বারা কোন ঘনকোণের তলসমূহের ছেদ একটি বহুভুজ হয় যাহার কোন প্রবৃদ্ধ কোণ থাকে না তখন ঘনকোণকে **উত্তল** (**convex**) বলে।

উপপাদ্য ৯

ত্রিতলকোণের যে-কোন তলকোণের যোগফল তৃতীয় তলকোণ অপেক্ষা বহত্তর।

[In a trihedral angle the sum of any two of the face-angles is greater than the third.]

মনে কর (S, ABC) একটি ত্রিতলকোণ, যাহার ASB, BSC, CSA তিনটি তলকোণ ; এবং মনে কর ইহাদের মধ্যে BSC কোণটিই বৃহত্তম।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ASB এবং CSA কোণদ্বয়ের যোগফল BSC কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

BSC সমতলে ∠BSA এর সমান করিয়া ∠BSD আঁক, এবং SD = SA করিয়া কাটিয়া লও। D এর মধ্য দিয়া BSC সমতলে একটি সরল রেখা টান যাহা SB এবং SCকে যথাক্রমে B এবং C বিন্দুতে ছেদ করে। AB এবং AC যোগ কর।

তাহা হইলে BSA এবং BSD ত্রিভুজদ্বয়ে

SA = SD, SB সাধারণ বাহু, এবং ∠BSA = ∠BSD ;

সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম ;

অতএব BA = BD.

এখন BAC ত্রিভুজে

BC অপেক্ষা BA + AC বৃহত্তর ;

অর্থাৎ BD + DC অপেক্ষা BA + AC বৃহত্তর ;

সুতরাং DC অপেক্ষা AC বৃহত্তর।

পুনরায়, CSA এবং CSD ত্রিভুজদ্বয়ে

SA = SD, SC সাধারণ বাহু, কিন্তু DC অপেক্ষা AC বৃহত্তর ;

সুতরাং ∠CSD অপেক্ষা ∠CSA বৃহত্তর।

অর্থাৎ ∠CSD + ∠BSD অপেক্ষা ∠CSA + ∠BSA বৃহত্তর।

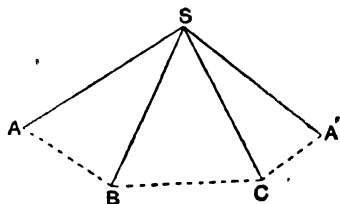
অতএব, ASB এবং CSA কোণদ্বয়ের যোগফল BSC কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

পরীক্ষা

এই উপপাদ্যের সত্যতা হাতেকলমে পরীক্ষা করিয়া দেখা যায় :

একটি ত্রিতলকোণ আঁকিতে হইলে তিনটি সমবিন্দু সমতলের প্রয়োজন। মনে কর তলকোণ তিনটিকে পাশাপাশি একই সমতলের উপর আঁকা হইয়াছে। দুই পার্শ্বে ASB এবং CSA′ (A′ আসলে A) এবং মধ্যে বৃহত্তম তলকোণ BSC.

এখন মনে কর ছবিটিকে SB এবং SC রেখার উপর দিয়া মুড়িয়া SA এবং SA′ এর সমাপতন করিবার চেষ্টা করা হইতেছে।

(ক) যদি ∠BSA + ∠CSA′ অপেক্ষা ∠BSC বড় হয়, তাহা হইলে SA এবং SA′ পরস্পরের সহিত কিছুতেই ঠেকিবে না ; অতএব ঘনকোণ উৎপন্ন হইবে না।

(খ) যদি ∠BSA + ∠CSA′ = ∠BSC হয়, তাহা হইলে SA এবং SA′ পরস্পরের সহিত ঠেকিবে বটে কিন্তু সমাপতন BSC সমতলের উপর ঘটিবে; অতএব ঘনকোণ উৎপন্ন হইবে না।

(গ) যদি $\angle BSA + \angle CSA'$ অপেক্ষা $\angle BSC$ ছোট হয়, তাহা হইলে SA, SA′ কে ছাড়াইয়া গিয়া পড়িবে এবং পরস্পরকে ঠিক মুখোমুখী ঠেকাইলে সমাপতন BSC সমতলের বাহিরে ঘটিবে; এবং কেবল এই ক্ষেত্রেই ঘনকোণ উৎপন্ন হইবে।

অতএব ত্রিতলকোণে যে-কোন দুইটি তলকোণের যোগফল তৃতীয় তলকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

উদাহরণমালা

উদা: ১। ত্রিতলকোণের তিনটি তলকোণের যোগফল চারি সমকোণ অপেক্ষা ছোট।

মনে কর (S,ABC) একটি ত্রিতলকোণ। ASকে A′ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর। তাহা হইলে (S,A′BC) ত্রিতলকোণে, $\angle A'SB + \angle A'SC > BSC$.

অর্থাৎ $\angle A'SB + \angle A'SC + \angle ASB + \angle ASC$

$$> \angle BSC + \angle ASB + \angle ASC.$$

কিন্তু $\angle A'SB + \angle ASB =$ দুই সমকোণ, এবং $\angle A'SC + \angle ASC =$ দুই সমকোণ।

অতএব তিনটি তলকোণের যোগফল চারি সমকোণ অপেক্ষা ছোট।

উদা: ২। OA, OB, OC তিনটি পরস্পর-ছেদী সরল রেখা এবং $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$; প্রমাণ কর যে, OA, OB, OC সামতলিক।

[ক: বি: 1935.]

যদি OA, OB, OC সামতলিক না হয়, তবে তাহারা O বিন্দুতে একটি ত্রিতল কোণ উৎপন্ন করিবে এবং তলকোণ AOB এবং BOC এর যোগফল $\angle AOC$ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; কিন্তু ইহা প্রকল্প বিরুদ্ধ;

অতএব OA, OB, OC নিশ্চয়ই সামতলিক.

প্রশ্নমালা ৯

১। প্রমাণ কর যে, তিনটি সমতল সাধারণতঃ সমবিন্দু হয়। কখন ইহারা সমবিন্দু হয় না ?

২। প্রমাণ কর যে, অসামতলিক চতুর্ভুজের চারিটি কোণের যোগফল চারি সমকোণ অপেক্ষা ছোট। [কঃ বিঃ 1932.]

৩। OA, OB, OC তিনটি অসামতলিক সরল রেখা O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে এবং (O, ABC) ত্রিতলকোণের মধ্যে OX যে-কোন আর একটি সরল রেখা ; প্রমাণ কর যে

(ক) AOX, BOX, COX কোণ তিনটির যোগফল AOB, BOC, COA কোণ তিনটির যোগফলের অর্দ্ধাপেক্ষা বড় ;

(খ) AOX, BOX, COX কোণ তিনটির যোগফল AOB, BOC, COA কোণ তিনটির যোগফল অপেক্ষা ছোট ;

(গ) AOX, COX কোণ দুইটির যোগফল AOB, BOC কোণ দুইটির যোগফল অপেক্ষা ছোট।

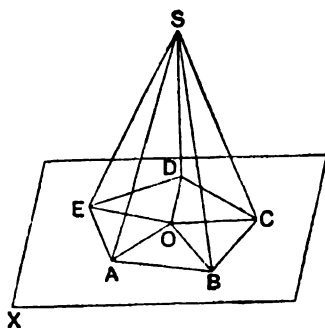
৪। ত্রিতলকোণের যে-কোন দুইটি তলকোণের অন্তর তৃতীয় তলকোণ অপেক্ষা ছোট।

৫। ত্রিতলকোণের তিনটি তলকোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ছোট।

৬। যদি একটি ত্রিতলকোণকে সম্পূর্ণরূপে অন্য একটি ত্রিতলকোণের মধ্যে ঢুকাইয়া দেওয়া সম্ভব হয় তবে বহিঃস্থ ত্রিতলকোণের তলকোণের সমষ্টি অন্তঃস্থ ত্রিতলকোণের তলকোণের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

উপপাদ্য ১০

উত্তল ঘনকোণের তলকোণসমূহের সমষ্টি চারি সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

[In a convex solid angle the sum of the face-angles is less than four right angles]

মনে কর (S, ABCDE) একটি উত্তল ঘনকোণ

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ASB, BSC, CSD, DSE, ESA তলকোণ-সমূহের সমষ্টি চারি সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

মনে কর কোন একটি সমতল XY, তলকোণসমূহের সমতলগুলিকে AB, BC, CD, DE, EA সরল রেখাসমূহে ছেদ করে। তাহা হইলে ABCDE একটি উত্তল সামতলিক বহুভুজ।

এই বহুভুজের মধ্যে যে-কোন বিন্দু O লও এবং OA, OB, OC, OD, OE যোগ কর।

A বিন্দুতে একটি ত্রিতলকোণ উৎপন্ন হইয়াছে, সুতরাং

$\angle SAB + \angle SAE > \angle EAB$, অর্থাৎ $> \angle OAE + \angle OAB$.

অনুরূপ ভাবে B, C, D, E বিন্দুতেও ত্রিতলকোণ উৎপন্ন হইয়াছে, সুতরাং

$\angle SBA + \angle SBC > \angle ABC$, অর্থাৎ $> \angle OBA + \angle OBC$;

$\angle SCB + \angle SCD > \angle BCD$, অর্থাৎ $> \angle OCB + \angle OCD$;

$\angle SDC + \angle SDE > \angle CDE$, অর্থাৎ $> \angle ODC + \angle ODE$;

$\angle SED + \angle SEA > \angle DEA$, অর্থাৎ $> \angle OED + \angle OEA$.

অতএব S শীর্ষের ত্রিভুজসমূহের ভূমিজ কোণগুলির সমষ্টি O শীর্ষের ত্রিভুজ সমূহের ভূমিজ কোণগুলির সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

যেহেতু S শীর্ষের ত্রিভুজসমূহের সংখ্যা O শীর্ষের ত্রিভুজসমূহের সংখ্যার সমান, অতএব উভয় প্রকার ত্রিভুজেরই সকল কোণ সমূহের সমষ্টি সমান।

সুতরাং S বিন্দুতে তলকোণসমূহের সমষ্টি O বিন্দুর চারিধারের কোণ সমূহের সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

কিন্তু O বিন্দুর চারিধারের কোণসমূহের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান ;

অতএব S বিন্দুতে তলকোণসমূহের সমষ্টি চারিকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

টীকা ঃ এই উপপাদ্যের সত্যতা সম্পর্কে হাতে কলমে পরীক্ষা ঠিক উপপাদ্য (৯) এর অনুরূপ।

উদাহরণমালা

উদা ঃ ১। যদি সমবিন্দু তিনটি রেখার মধ্যস্থিত কোণ তিনটির সমষ্টি চারি সমকোণের সমান হয়, তবে উহারা সামতলিক।

মনে কর OA, OB, OC তিনটি সরল রেখা এবং $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA =$ চারি সমকোণ। যদি উহারা সামতলিক না হয় তাহা হইলে OA, OB ; OB, OC ; এবং OC, OA এর মধ্যগামী তিনটি সমতল O বিন্দুতে একটি উত্তল সমকোণ উৎপন্ন করিবে। তাহা হইলে $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA$ চারি সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। কিন্তু ইহা প্রকল্প বিরুদ্ধ।

অতএব উহারা নিশ্চয়ই সামতলিক।

উদা ঃ ২। যদি যে-কোন একটি বিন্দুকে একটি উত্তল বহুভুজের শীর্ষ-সমূহের সহিত যোগ করা হয় এবং এই যোগ রেখাসমূহের অন্তঃস্থ কোণসমূহের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান হয়, তবে উহারা সামতলিক।

যদি এই সরল রেখাসমূহ সামতলিক না হয়, তাহা হইলে তাহারা একটি উত্তল ঘনকোণ উৎপন্ন করিবে। সুতরাং ক্রমিক রেখাসমূহের অন্তঃস্থিত কোণগুলির সমষ্টি চারি সমকোণ অপেক্ষা ছোট হইবে। কিন্তু ইহা প্রকল্প বিরুদ্ধ।

অতএব উহারা নিশ্চয়ই সামতলিক।

প্রশ্নমালা ১০

১। একটি চতুস্তল কোণের তিনটি তলকোণের সমষ্টি চতুর্থ তলকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

২। যদি একটি ঘনকোণের শীর্ষের মধ্য দিয়া একটি সরল রেখা টানা যায়, প্রমাণ কর যে প্রান্তিকীসমূহের সহিত এই রেখা যে সকল কোণ উৎপন্ন করে, তাহাদের সমষ্টি তলকোণ সমূহের অর্দ্ধসমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

৩। O একটি প্রদত্ত সমতলস্থ নির্দ্দিষ্ট বিন্দু এবং P ইহার বহিঃস্থ একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু; প্রদত্ত সমতলস্থ O বিন্দুগামী সরল রেখা সমূহের উপর P হইতে অঙ্কিত লম্ব সমূহের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৪। যদি কোন n তলযুক্ত উত্তল ঘনকোণের তলকোণসমূহ m বাহুযুক্ত সুষম বহুভুজের কোণসমূহের সমান হয়, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{m}+\frac{1}{n} > \frac{1}{2}$.

বিবিধ প্রশ্নমালা

১। যদি একটি সমতল, দুইটি সমান্তরাল সরল রেখার একটির সমান্তরাল হয়, প্রমাণ কর যে উহা অপরটিরও সমান্তরাল।

২। যদি একটি সরল রেখা একটি প্রদত্ত সমতলের সমান্তরাল হয়, প্রমাণ কর যে, সেই রেখাগামী সমতলসমূহ প্রদত্ত সমতলকে সমান্তরাল সরল রেখাসমূহে ছেদ করিবে।

৩। AB এবং CD দুইটি অসামতলিক সরল রেখা, প্রমাণ কর যে AC, BD এবং AD, BC ও অসামতলিক।

৪। যদি তিনটি সরল রেখা একই সমতলের সমান্তরাল হয়, এবং যে-কোন একটি চল সরল রেখা উহাদের X, Y, Z বিন্দুতে যথাক্রমে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে XY : YZ ধ্রুব।

৫। একটি বহিঃস্থ বিন্দু A হইতে দুইটি পরস্পর-ছেদী সমতলের উপর দুইটি লম্ব AP এবং AQ আঁকা হইয়াছে ; প্রমাণ কর যে

(ক) প্রদত্ত সমতল দুইটির ছেদ রেখা AP এবং AQ গামী সমতলের উপর লম্ব ;

(খ) দুইটি লম্বের মধ্যস্থিত কোণ প্রদত্ত সমতল দুইটির অন্তঃস্থ দ্বিতলকোণের সমান অথবা সম্পূরক।

৬। একটি প্রদত্ত রেখার মধ্যগামী সমতল সমূহের উপর বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে লম্ব সমূহ আঁকা হইয়াছে ; পাদবিন্দু সমূহের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৭। AB, BC, CD তিনটি অসামতলিক সরল রেখা ; প্রমাণ কর যে তাহাদের মধ্যবিন্দু তিনটির মধ্যগামী সমতল AC এবং BD এর সমান্তরাল।

৮। তিনটি সমরেখ সরল রেখা OA, OB, OC পরস্পরের উপর লম্ব ; প্রমাণ কর যে, যদি

(ক) BC, CA, AB এর উপর যথাক্রমে OX, OY, OZ লম্ব হয়, তবে XYZ ত্রিভুজ, ABC ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ (pedal triangle) ;

(খ) ABC সমতলের উপর OP লম্ব হয়, তবে P বিন্দু ABC ত্রিভুজের লম্ব-বিন্দু।

৯। তির্য্যক সমতলস্থ যে-কোন বিন্দুর মধ্য দিয়া এমন একটি সরল রেখা আঁক, অনুভূমিক সমতলের সহিত যাহার নতি বৃহত্তম। [এই রেখাকে **বৃহত্তম নতির রেখা** (line of the greatest slope) বলে।]

১০। যদি একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরল রেখা এমন ভাবে নড়িয়া বেড়ায় যে তাহার দুইটি প্রান্ত সকল অবস্থাতেই দুইটি অসামতলিক সরল রেখাকে স্পর্শ করে, প্রমাণ কর যে উহার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

তৃতীয় অধ্যায়

ঘন বস্তু (Solid figures)

সংজ্ঞা ঃ এক বা একাধিক সমতল অথবা বক্র-তল দ্বারা বেষ্টিত দেশকে ঘন বস্তু বা ঘন বলে। সমতলসমূহ দ্বারা বেষ্টিত দেশকে **বহুতলক** (polyhedron) বলে।

বহুতলক উৎপন্ন করিতে হইলে অন্ততঃ পক্ষে চারিটি তলের প্রয়োজন, কিন্তু যদি উহাদের দুইটি তল সমান্তরাল হইয়া যায়, তবে অন্ততঃ পক্ষে পাঁচটি তলের প্রয়োজন হয়।

যেহেতু দুইটি সমতল পরস্পরকে সরল রেখায় ছেদ করে, অতএব **প্রান্ত রেখা** বা **প্রান্তিকী** (edges) সমূহ সরল রেখা এবং প্রত্যেক **তল** (plane faces) ঋজুরেখা বেষ্টিত।

যদি প্রত্যেক তল সুষম হয় এবং প্রত্যেক শীর্ষে সম-সংখ্যক তল মিলিত হয় তবে বহুতলকে **সুষম** (regular) বলা হয়।

১। পাঁচটির অধিক সুষম বহুতলক থাকিতে পারে না।

একটি ঘনকোণ উৎপন্ন করিতে হইলে অন্ততঃপক্ষে তিনটি তলকোণের প্রয়োজন। কিন্তু তলকোণ সমূহের যোগফল চারি সমকোণ অপেক্ষা ছোট। অতএব যে-কোন সুষম বহুতলকের তলকোণ 120° অপেক্ষা ছোট।

তাহা হইলেই দেখা যাইতেছে যে, সুষম বহুতলকের তলসমূহ সমবাহু ত্রিভুজ, বর্গ অথবা সুষম পঞ্চভুজ হইবে ; কারণ ষড়্‌ভুজের কোণ 120° এবং তাহার অধিক বাহুযুক্ত বহুভুজের কোণ 120° অপেক্ষা বৃহত্তর।

মনে কর কোন তলকোণ D ডিগ্রীর সমান।

(ক) যখন তল সমবাহু ত্রিভুজ, $D = 60^\circ$

তখন (১) $3D=180^\circ$, (২) $4D=240^\circ$, (৩) $5D=300^\circ$.
[$6D=360^\circ$, সুতরাং ইহা লওয়া চলিবে না]

তাহা হইলে একটি সুষম বহুতলকের ঘন কোণ উৎপন্ন করিবার জন্য তিন, চারি অথবা পাঁচটি সমবাহু ত্রিভুজ লওয়া চলে, কিন্তু পাঁচটির অধিক লওয়া চলিবে না।

(খ) যখন তল বর্গ, $D=90^\circ$

তখন (৪) $3D=270^\circ$, [$4D=360^\circ$, সুতরাং ইহা লওয়া চলিবে না]।

তাহা হইলে কেবল মাত্র তিনটি বর্গ ব্যবহার করা চলিবে।

(গ) যখন তল পঞ্চভুজ, $D=108^\circ$.

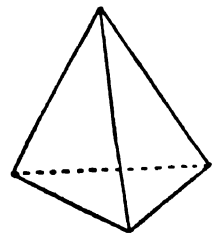
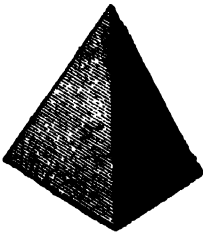
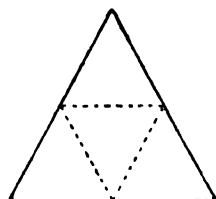
তখন (৫) $3D=324^\circ$, [$4D=432^\circ$, সুতরাং ইহা লওয়া চলিবে না]।

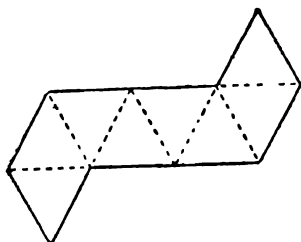
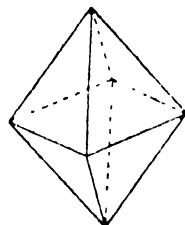
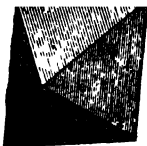
তাহা হইলে কেবল মাত্র তিনটি পঞ্চভুজ ব্যবহার করা চলিবে।

অতএব পাঁচটির অধিক সুষম বহুতলক সম্ভব নয়।

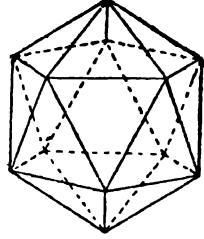
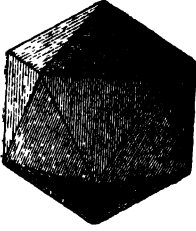
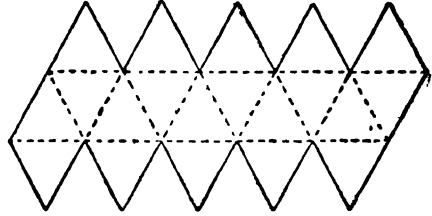
যদি কোন সুষম বহুতলকের তল সমূহকে খুলিয়া সমতলের উপর পাতা হয়, তাহা হইলে সমতল ছবিগুলি সমবাহু ত্রিভুজ, বর্গ অথবা সুষম পঞ্চভুজ হইবে। সমতল ছবিগুলিকে অনুরূপ বহুতলকের **জাল** (net) বলা হয়।

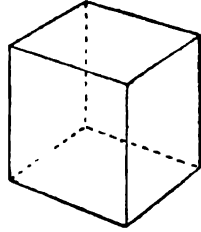
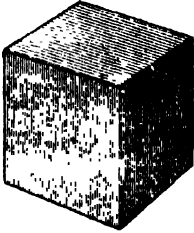
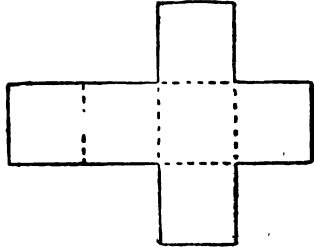
সুষম বহুতলক (Regular Polyhedra)

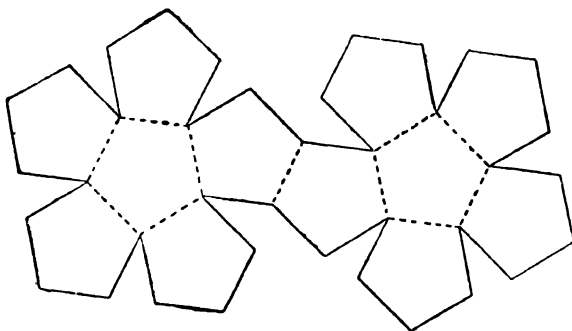
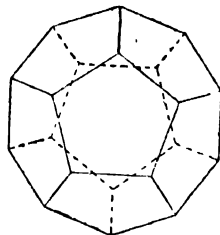
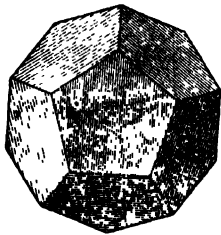
(১) প্রতিটি ঘনকোণ **তিনটি সমবাহু ত্রিভুজ** দ্বারা উৎপন্ন হইলে সুষম বহুতলককে সুষম **ত্রিতলক** (tetrahedron) বলে।

ইহার তল চারিটি
শীর্ষ চারিটি
প্রান্তিকী ছয়টি

সুষম ত্রিতলকের জাল চারিটি সমান সমবাহু ত্রিভুজ।

(২) প্রতিটি ঘনকোণ **চারিটি সমবাহু ত্রিভুজ** দ্বারা উৎপন্ন হইলে সুষম বহুতলককে সুষম **অষ্টতলক** (octahedron) বলে।

ইহার তল আটটি
শীর্ষ ছয়টি
প্রান্তিকী বারটি

সুষম অষ্টতলকের জাল আটটি সমান সমবাহু ত্রিভুজ।

(৩) প্রতিটি ঘনকোণ **পাঁচটি সমবাহু ত্রিভুজ** দ্বারা উৎপন্ন হইলে সুষম বহুতলককে সুষম **বিংশতলক** (icosahedron) বলে।

ইহার তল কুড়িটি
শীর্ষ বারটি
প্রান্তিকী ত্রিশটি

সুষম বিংশতলকের জাল কুড়িটি সমান সমবাহু ত্রিভুজ।

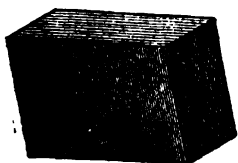
(৪) প্রতিটি ঘনকোণ **তিনটি বর্গ** দ্বারা উৎপন্ন হইলে সুষম বহুতলককে **ঘনক** (cube) বলে।

ইহার তল ছয়টি
শীর্ষ আটটি
প্রান্তিকী বারটি

ঘনকের জাল ছয়টি সমান বর্গ।

(৫) প্রতিটি ঘনকোণ **তিনটি সুষম পঞ্চভুজ** দ্বারা উৎপন্ন হইলে সুষম বহুতলককে সুষম **দ্বাদশতল** (dodecahedron) বলে।

ইহার তল বারটি, শীর্ষ কুড়িটি এবং প্রান্তিকী ত্রিশটি।

সুষম দ্বাদশতলের জাল বারটি সমান সুষম পঞ্চভুজ।

২। এইবার কয়েকটি বিশেষ ঘনের আলোচনা করা হইতেছে।

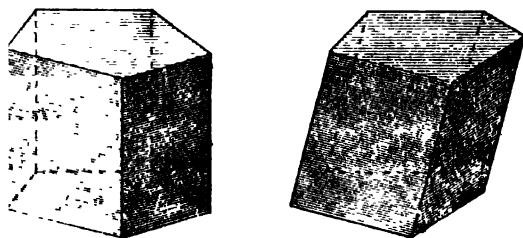
(ক) **ঘন সামান্তরিক** (**Parallelepiped**) :

তিন জোড়া সমান্তরাল সমতল দ্বারা বেষ্টিত ঘনকে **ঘন সামান্তরিক** বলে।

ইহার প্রত্যেক তল সামান্তরিক এবং প্রত্যেক বিপরীত তলদ্বয় সর্ব্বসম। বারটি প্রান্তিকীকে তিন ভাগে বিভক্ত করা যায়; প্রত্যেক ভাগে চারিটি করিয়া সমান এবং সমান্তরাল প্রান্তিকী।

যদি ঘনসামান্তরিকের তলসমূহ আয়তক্ষেত্র হয়

তবে তাহাকে **আয়ত ঘন** (**rectangular solid**) অথবা **উপঘনক** (**cuboid**) বলে।

যদি প্রত্যেক তল বর্গ হয় তবে তাহাকে **ঘনক** (**cube**) বলা হয়।

(খ) **প্রিজ্‌ম্** (**prism**) :

কয়েকটি সমতল দ্বারা বেষ্টিত ঘনের পার্শ্বতল সমূহ (**side faces**) সামান্তরিক এবং যাহার দুইটি প্রান্ততল (**ends**) সমান্তরাল সর্ব্বসম সামতলিক বহুভুজ, তাহাকে **প্রিজ্‌ম্** বলে।

পার্শ্বতল সমূহ, একসঙ্গে দুইটি করিয়া লইলে পরস্পরকে যে সরল রেখায় ছেদ করে, তাহাদের **পার্শ্বপ্রান্তিকী** (**side-edges**) বলা হয়।

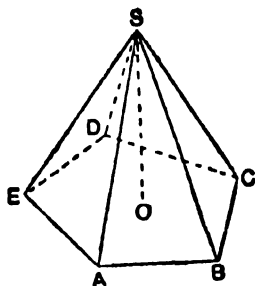
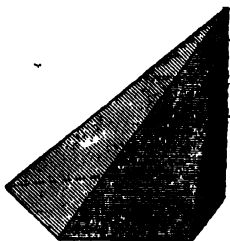
দুইটি প্রান্ততলের মধ্যে লম্ব ব্যবধানকে প্রিজ্‌মের **উচ্চতা** বা **খাড়াই** (**height**) বলা হয়।

যে প্রিজ্‌মের পার্শ্বপ্রান্তিকী সমূহ প্রান্ততলের উপর লম্ব হয়, তাহাকে **লম্ব প্রিজ্‌ম্** (**right prism**) বলে ; এতদ্ব্যতীত অন্য সকল প্রিজ্‌ম্‌কে **তির্য্যক প্রিজ্‌ম্** (**oblique prism**) বলে।

উপঘনক একটি লম্ব প্রিজ্‌ম্, যাহার ভূমি একটি আয়তক্ষেত্র।

(গ) **পিরামিড** (**pyramid**) :

কয়েকটি সমতল দ্বারা বেষ্টিত ঘন যাহার প্রান্ততল কেবল একটি এবং পার্শ্বতল-গুলি সমশীর্ষ ত্রিভুজ সমূহ, তাহাকে **পিরামিড বা শিখর** বলে। প্রান্ততল যে-কোন সামতলিক বহুভুজ এবং ইহাকে পিরামিডের **ভূমি** (**base**) বলা হয়।

শীর্ষ (vertex) প্রান্ততলের বাহিরে যে-কোন একটি বিন্দু। শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যকে পিরামিডের **উচ্চতা** (height) বলে। পার্শ্বতল

সমূহ, এক সঙ্গে দুইটি করিয়া লইলে, পরস্পরকে যে সরল রেখায় ছেদ করে, তাহাদের পার্শ্ব প্রান্তিকী বলা হয়। যদি পিরামিডের ভূমি সুষম বহুভুজ হয় এবং শীর্ষ হইতে অঙ্কিত লম্ব ভূমির কেন্দ্রগামী হয়, তবে পিরামিডকে **লম্ব পিরামিড** (right pyramid) বলে ; এতদ্ব্যতীত অন্য সকল পিরামিডকে **তির্য্যক পিরামিড** (oblique pyramid) বলে। লম্ব পিরামিডের **তির্য্যক উচ্চতা** (slant height) বলিতে শীর্ষ হইতে ভূমির যে-কোন ভুজের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য বুঝায়।

যে পিরামিডের ভূমি ত্রিকোণ তাহাকে **ত্রিতলক** বলে।

৩। **পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল** (Areas of the surfaces and volumes) :

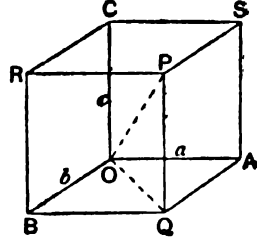
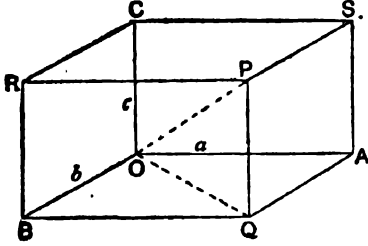
ঘন বস্তুর মধ্যস্থিত দেশকে তাহার ঘনফল, ঘনমান বা আয়তন বলে।

ক্ষেত্রফলের দুইটি এবং ঘনফলের তিনটি মাত্রা থাকে। অতএব ক্ষেত্রফল বর্গ একক দ্বারা এবং ঘনফল ঘন একক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(ক) উপঘনকের প্রান্তিকীগুলি a, b এবং c দৈর্ঘ্য একক হইলে,

পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2ab + 2bc + 2ca$ বর্গ একক ;

এবং ঘনফল $= abc$ ঘন একক।

ঘনকের প্রান্তিকী a একক হইলে, (এ ক্ষেত্রে $a=b=c$),

পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = ৬a^2 বর্গ একক ;

এবং ঘনতল = a^3 বর্গ একক।

সূত্র হিসাবে লেখা যায়,

উপঘনকের ঘনফল = লম্ব × প্রস্থ × উচ্চতা = (ভূমির ক্ষেত্রফল) × উচ্চতা ;

এবং ঘনকের ঘনফল = (প্রান্তিকী $)^3$.

(খ) লম্ব প্রিজমের পার্শ্ব ক্ষেত্রফল = (ভূমির পরিসীমা) × উচ্চতা ;

এবং সমগ্র ক্ষেত্রফল = পার্শ্ব ক্ষেত্রফল + দুইটি প্রান্ততলের ক্ষেত্রফল।

লম্ব প্রিজমের ঘনফল = (ভূমির ক্ষেত্রফল) × উচ্চতা।

তির্য্যক প্রিজমের পার্শ্ব ক্ষেত্রফল = (লম্ব ছেদের পরিসীমা) × প্রান্তিকী,

এবং ঘনফল = (ভূমির ক্ষেত্রফল) × লম্ব উচ্চতা।

(গ) লম্ব পিরামিডের তির্য্যক পৃষ্ঠসমূহের ক্ষেত্রফল

= $\frac{1}{2}$ (ভূমির পরিসীমা) × তির্য্যক উচ্চতা ;

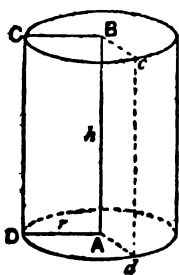
এবং সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = তির্য্যক পৃষ্ঠসমূহের ক্ষেত্রফল + ভূমির ক্ষেত্রফল।

লম্ব পিরামিডের ঘনফল = $\frac{1}{3}$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) × উচ্চতা।

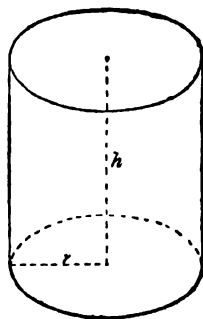
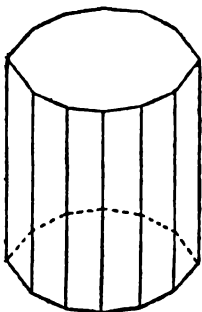
৪। **পরিক্রমজ ঘন** (Solids of revolution) :

(ক) যে-কোন আয়ত ক্ষেত্রের একটি বাহুকে অক্ষ ধরিয়া ক্ষেত্রটিকে

ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয়, তাহাকে **লম্ব বৃত্তাকার চোঙ** (Right circular cylinder) বলে।

ছবিতে AB ভুজকে অক্ষ ধরিয়া ABCD আয়ত ক্ষেত্রকে ঘোরানো হইয়াছে।.

বিপরীত ভুজ CD চোঙের বক্রপৃষ্ঠ উৎপন্ন করিয়াছে ; সুতরাং CD কে **উৎপাদক রেখা** (generating line) বলা হয়। অক্ষের দুই প্রান্তে অক্ষের উপর লম্ব AD এবং BC বাহু দুইটি সমান্তরাল ভাবে ঘুরিয়া দুইটি বৃত্তাকার **প্রান্ততল** (ends) বা **ভূমি** (base) সৃষ্টি করিয়াছে। অক্ষ AB এর দৈর্ঘ্যকে লম্ব চোঙের **উচ্চতা** (height) বলে।

মনে কর একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা h এবং উহার ভূমির ব্যাসার্দ্ধ r ; তবে চোঙের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = (ভূমির পরিধি) × উচ্চতা

$= 2\pi rh$ ক্ষেত্র একক ;

এবং সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

= বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + দুইটি প্রান্ততলের ক্ষেত্রফল

$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$ ক্ষেত্র একক।

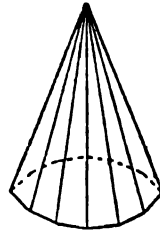
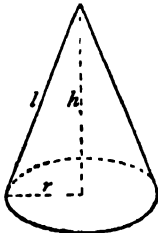
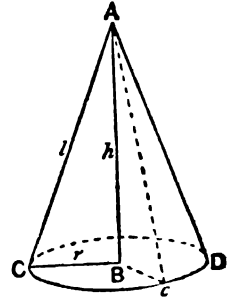
চোঙের ঘনফল = (ভূমির ক্ষেত্রফল) × উচ্চতা

$= \pi r^2 h$ ঘন একক।

টীকা ঃ লম্ব চোঙের বক্রপৃষ্ঠকে যে-কোন উৎপাদক রেখার উপর দিয়া কাটিয়া সমতলের উপর খুলিয়া পাতিলে একটি আয়তক্ষেত্র পাওয়া যাইবে। ইহার একটি ভুজ চোঙের উচ্চতার সমান এবং অপর ভুজটি ভূমির পরিধির সমান। অতএব ক্ষেত্রফল=(ভূমির পরিধি)×উচ্চতা।

লম্ব চোঙ লম্ব প্রিজ্‌মের একটি বিশেষ রূপ।

(খ) সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহুকে অক্ষ ধরিয়া ত্রিভুজটিকে ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয়, তাহাকে **লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু** (Right circular cone) বলে।

ছবিতে AB বাহুকে অক্ষ ধরিয়া ABC সমকোণী ত্রিভুজকে ঘোরানো হইয়াছে। অতিভুজ AC শঙ্কুর বক্রপৃষ্ঠ উৎপন্ন করিয়াছে ; সুতরাং AC কে **উৎপাদক রেখা** বলা হয়। অপর বাহু BC যে বৃত্ত সৃষ্টি করিয়াছে, তাহাকে **প্রান্ততল** বা **ভূমি** বলা হয়। A বিন্দুকে শঙ্কুর **শীর্ষ** (vertex) এবং CAD কোণকে (যাহা ঘূর্ণ্যমান ত্রিভুজের A কোণের দ্বিগুণ) **শিরঃকোণ** (vertical angle) বলে। অক্ষের দৈর্ঘ্য (=AB) অর্থাৎ শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যকে শঙ্কুর **উচ্চতা** এবং অতিভুজ AC কে **তির্য্যক উচ্চতা** বলা হয়।

মনে কর একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা h এবং উহার ভূমির ব্যাসার্দ্ধ r ; তবে শঙ্কুর বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল= $\frac{1}{2}$ (ভূমির পরিধি)×তির্য্যক উচ্চতা

$=\pi rl$ ক্ষেত্র একক ; $(l=\sqrt{h^2+r^2})$

এবং সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $=$ বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $+$ ভূমির ক্ষেত্রফল

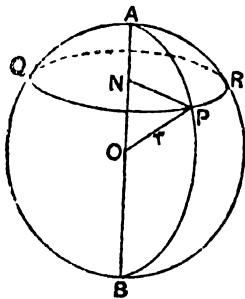
$= \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$ ক্ষেত্র একক।

শঙ্কুর ঘনফল $= \frac{1}{3}$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$ ঘন একক।

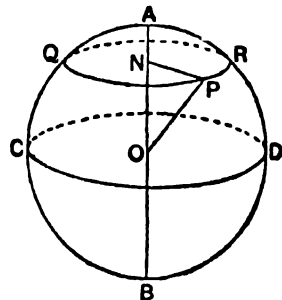
টীকা : লম্ব শঙ্কুর বক্রপৃষ্ঠকে যে-কোন উৎপাদক রেখার উপর দিয়া কাটিয়া সমতলের উপর খুলিয়া পাতিলে একটি বৃত্তকলা পাওয়া যাইবে। শঙ্কুর শীর্ষ ইহার কেন্দ্র এবং তির্য্যক উচ্চতা ইহার ব্যাসার্দ্ধ।

অতএব ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (বৃত্তচাপ) $\times$ ব্যাসার্দ্ধ

$= \frac{1}{2}$ (ভূমির পরিধি) $\times$ তির্য্যক উচ্চতা।

লম্ব শঙ্কু লম্ব পিরামিডের একটি বিশেষ রূপ।

(গ) ব্যাসকে অক্ষ ধরিয়া অর্দ্ধ-বৃত্তকে ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয় তাহাকে **গোলক** (sphere) বলে।

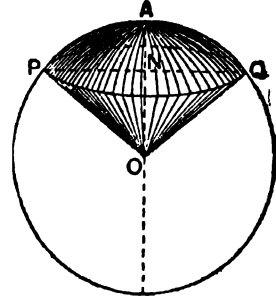
ছবিতে AB ব্যাসকে অক্ষ ধরিয়া APB অর্দ্ধবৃত্তকে ঘোরানো হইয়াছে। অর্দ্ধ-পরিধি APB গোলকের বক্রপৃষ্ঠ উৎপন্ন করিয়াছে। বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পৃষ্ঠস্থ সকল বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্দ্ধের সমান ; অতএব বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্দ্ধই গোলকের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্দ্ধ।

গোলকের যে কোন সমতল ছেদ একটি বৃত্ত। যদি ছেদ-বৃত্তের কেন্দ্র গোলকের কেন্দ্রের সহিত এক হইয়া যায়, তবে সেই ছেদকে **বৃহৎবৃত্ত** (Great circle) বলে। অন্য সকল ছেদকে **ক্ষুদ্রবৃত্ত** (Small circle) বলে। ছবিতে QRP ক্ষুদ্রবৃত্ত এবং CD বৃহৎবৃত্ত।

মনে কর গোলকের ব্যাসার্দ্ধ r ; তবে

গোলকের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ ক্ষেত্র একক ;

এবং উহার ঘনফল $= \frac{1}{3}$ (গোলকপৃঃ) × ব্যাসার্দ্ধ $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক।

গোলকাংশের ঘনফল ও বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

গোলককে একটি সমতল দ্বারা বিভক্ত করিলে যে দুইটি অংশ পাওয়া যায় তাহাদের **গোলকাংশ** (segments of a sphere) বলে।

ছবিতে গোলককে PQ সমতল দ্বারা বিভক্ত করা হইয়াছে; PAQ একটি গোলকাংশ। মনে কর গোলকের ব্যাসার্দ্ধ r এবং অংশের উচ্চতা অর্থাৎ AN $= h$.

তবে ইহার ঘনফল $= \pi h^2 (r - \frac{h}{3})$.

ইহার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$.

দুইটি সমান্তরাল সমতলের মধ্যে গোলকের যে অংশটুকু থাকে তাহাকে গোলকের **ছেদিতাংশ** (frustum of a sphere) বলে।

ছেদিতাংশের দুইটি বৃত্তাকার প্রান্ততলের ব্যাসার্দ্ধ r_1, r_2 এবং তাহাদের মধ্যে লম্ব ব্যবধান k হইলে গোলকের ছেদিতাংশের ঘনফল

$$= \frac{1}{6}\pi k \, (3r_1^2 + 3r_2^2 + k^2) \; ;$$

এবং ইহার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rk$, যেখানে r গোলকের ব্যাসার্দ্ধ।

উদাহরণমালা

উদা: ১। একটি পিরামিডের ভূমি ত্রিভুজ, যাহার বাহু সমূহ 8, 15 এবং 17 *cm.* ; পিরামিডের উচ্চতা 12 *cm.*, হইলে উহার ঘনফল নির্ণয় কর।

[কঃ বিঃ 1946, '48.]

ত্রিভুজের বাহু সমূহ 8, 15 এবং 17 *cm.*

যেহেতু $8^2+15^2=17^2$, সুতরাং ইহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

অতএব ভূমির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}.\ 8.\ 15=60$ *sq. cm.*

সুতরাং পিরামিডের ঘনফল $=\frac{1}{3}.\ 60.\ 12=240$ *cu. cm.*

উদাঃ ২। একটি প্রিজ্‌মের ভূমি ত্রিভুজ, যাহার বাহু সমূহ 9, 10 এবং 17 *cm.*; প্রিজ্‌মের উচ্চতা 10 *cm.* হইলে উহার ঘনফল এবং সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1940.]

ত্রিভুজের বাহু সমূহ 9, 10 এবং 17 *cm.*

ভূমির অর্দ্ধ-পরিসীমা $=\frac{1}{2}(9+10+17)=18$ *cm.*

সুতরাং ভূমির ক্ষেত্রফল $=\sqrt{\{18(18-9)(18-10)(18-17)\}}=36$ *sq.cm.*

অতএব প্রিজ্‌মের ঘনফল $=36.\ 10=360$ *cu. cm.*

ভূমির পরিসীমা $=9+10+17=36$ *cm.*

সুতরাং প্রিজ্‌মের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $=36.\ 10=360$ *sq. cm.*

দুইটি প্রান্ততলের ক্ষেত্রফল $=2.\ 36=72$ *sq. cm.*

অতএব প্রিজ্‌মের সমগ্র ক্ষেত্রফল $=360+72=432$ *sq. cm.*

উদাঃ ৩। একটি বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 15 *cm.*, এবং উহার ভূমির ব্যাসার্দ্ধ 8 *cm*, শঙ্কুর বক্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল এবং ঘনফল নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1942.]

লম্ব শঙ্কুর উচ্চতা $=15$ *cm.*, এবং ভূমির ব্যাসার্দ্ধ $=8$ *cm.*,

সুতরাং তির্য্যক উচ্চতা $=\sqrt{15^2+8^2}=17$ *cm.*

অতএব বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $=\pi.\ 8.\ 17=427\cdot26$ *sq. cm.* (প্রায়)

শঙ্কুর ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi.\ 8^2.\ 15=1005\cdot31$ *cu. cm.* (প্রায়)

উদাঃ ৪। গোলকরূপী একতাল কাদাকে একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙে রূপান্তরিত করা হইয়াছে, যাহার উচ্চতা 16 *ins*; চোঙের ভূমির ব্যাসার্দ্ধ গোলকের ব্যাসার্দ্ধের সমান হইলে, ব্যাসার্দ্ধের মান নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1949.]

মনে কর, নির্ণেয় ব্যাসার্দ্ধ $= r$;

তাহা হইলে $\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 . 16$

অতএব $r = 12$ *ins.*

উদা ঃ ৫। 20 *ft.* উচ্চ একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুকে অক্ষের মধ্যবিন্দু-গামী লম্ব সমতল দ্বারা ছেদ করা হইয়াছে; যদি শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্দ্ধ 4 *ft.* হয় তবে উপরিভাগ বাদ দিলে অবশিষ্ট অংশের ঘনফল নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1936.]

সমগ্র শঙ্কুর ঘনফল $= \frac{1}{3}\pi . 4^2 . 20 = \frac{320}{3}\pi$ *cu ft.*

যেহেতু শঙ্কুকে অক্ষের মধ্যবিন্দু-গামী লম্ব সমতল দ্বারা ছেদ করা হইয়াছে অতএব উপরিভাগও একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু, যাহার উচ্চতা 10 *ft*, এবং ভূমির ব্যাসার্দ্ধ 2 *ft.*

ইহার ঘনফল $= \frac{1}{3}\pi . 2^2 . 10 = \frac{40}{3}\pi$ *cu ft.*

অতএব অবশিষ্ট অংশের ঘনফল $= \frac{320}{3}\pi - \frac{40}{3}\pi = \frac{280}{3} . \frac{22}{7}$

$= 293\frac{1}{3}$ *cu. ft.*

উদা ঃ ৬। একটি ফাঁপা চোঙের ধারকত্ব একটি ফাঁপা শঙ্কুর ধারকত্বের পনেরো গুণ; যদি উভয়ই লম্ব বৃত্তাকার হয় এবং উভয়েরই ভূমি সমান হয় তবে উহাদের উচ্চতার অনুপাত নির্ণয় কর।

যদি উভয়েরই ভূমির ক্ষেত্রফল A হয় এবং চোঙের উচ্চতা h_1 এবং শঙ্কুর উচ্চতা h_2 হয়, তবে

চোঙের ধারকত্ব = চোঙের ঘনফল $= Ah_1$

এবং শঙ্কুর ধারকত্ব = শঙ্কুর ঘনফল $= \frac{1}{3}Ah_2$.

কিন্তু $Ah_1 = 15 . \frac{1}{3}Ah_2$.

অতএব $\frac{h_1}{h_2} = \frac{5}{1}$.

উদা ঃ ৭। একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুকে তাহার ভূমির সমান্তরাল একটি সমতল দ্বারা এমন ভাবে বিভক্ত কর, যাহাতে

(ক) দুইটি অংশের বক্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল সমান হয় ;

(খ) দুইটি অংশের ঘনফল সমান হয়। [কঃ বিঃ 1947.]

মনে কর সমগ্র শঙ্কু এবং ভূমির সমান্তরাল একটি সমতল দ্বারা ছেদিত সদৃশ শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্দ্ধ, উচ্চতা এবং তির্য্যক উচ্চতা যথাক্রমে r, h, l এবং r', h', l'.

তাহা হইলে $\frac{r}{r'}=\frac{h}{h'}=\frac{l}{l'}$.

(ক) দুইটি অংশের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল সমান, অর্থাৎ সমগ্র শঙ্কুর অর্দ্ধেক ,

অতএব $\frac{1}{2}.\ \pi rl=\pi r'l'$

অর্থাৎ $\frac{rl}{r'l'}=2$, অথবা $\frac{h^2}{h'^2}=2$.

$\therefore\quad \frac{h}{h'}=\sqrt{2}$.

(খ) দুইটি অংশের ঘনফল সমান, অর্থাৎ সমগ্র শঙ্কুর অর্দ্ধেক ;

অতএব $\frac{1}{2}\ .\ \frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r'^2h'$.

অর্থাৎ $\frac{r^2h}{r'^2h'}=2$, অথবা $\frac{h^3}{h'^3}=2$.

$\therefore\quad \frac{h}{h'}=\sqrt[3]{2}$.

উদা ঃ ৮। একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ এবং একটি গোলকের ঘনফলের অনুপাত 3 : 2, এবং চোঙের ভূমির ব্যাসার্দ্ধ গোলকের ব্যাসের সমান ; প্রমাণ কর যে, চোঙের উচ্চতা গোলকের ব্যাসার্দ্ধের অর্দ্ধ।

মনে কর চোঙের উচ্চতা h এবং ভূমির ব্যাসার্দ্ধ r ; তাহা হইলে গোলকের ব্যাস r.

অতএব $\dfrac{\pi r^2 h :}{\frac{4}{3}\pi \dfrac{r^3}{8}} = \dfrac{3}{2}$; অর্থাৎ $h = \dfrac{r}{4}$.

উদা: ৯। (ক) একটি ভরাট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 45 *cm.* এবং ভূমির ব্যাস 4 *cm* ; উহাকে গলাইয়া কয়টি 6 *cm.* ব্যাসের গোলক নির্ম্মাণ করা যায় ?

(খ) যদি এই চোঙটি ফাঁপা হয়, তবে 6 *cm.* ব্যাসের কয়টি গোলাকার চাকতি নির্ম্মাণ করা যায় ? [কঃ বিঃ 1950.]

(ক) চোঙের ঘনফল $= \pi . 2^2 . 45$, এবং গোলকের ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi . 3^3$;

অতএব গোলকের সংখ্যা $= \dfrac{\pi . 2^2 . 45}{\frac{4}{3} . \pi\ 3^3} = 5.$

(খ) চোঙের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi . 2 . 45,$

এবং চাকতির ক্ষেত্রফল $= \pi . 3^2$;

অতএব চাকতির সংখ্যা $= \dfrac{2\pi . 2 . 45}{\pi . 3^2} = 20$

উদা: ১০। 10 *ins* ব্যাসের একটি ভরাট গোলককে কেন্দ্র হইতে 2 *ins* দূরবর্ত্তী একটি সমতল দ্বারা দুই ভাগে বিভক্ত করা হইয়াছে। (ক) দুই অংশের ঘনফলের অনুপাত এবং (খ) দুই অংশের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় কর।

(ক) ছোট অংশের ঘনফল $= \pi . 3^2 (5 - \frac{3}{3}) = 36\pi$;

এবং বড় অংশের ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi . 5^3 - 36\pi = \dfrac{392}{3}\pi.$

অতএব অনুপাত $= 108 : 392$, অর্থাৎ $27 : 98$.

(খ) ছোট অংশের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi . 5 . 3 = 30\pi$;

এবং বড় অংশের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 4\pi . 5^2 - 30\pi = 70\pi.$

অতএব অনুপাত $= 30 : 70$, অর্থাৎ $3 : 7$.

প্রশ্নমালা

১। একটি ঘরের চারিটি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল 86·70 বর্গ মিটার এবং উহার উচ্চতা 3 40 মিটার ; ঘরের ভূমির পরিসীমা নির্ণয় কর।

২। 3 মিলিমিটার মোটা এক বর্গ মিটার পাতের ভার নির্ণয় কর, যদি ভরাঙ্ক 7·14 হয়।

৩। সমান মোটা কাঠের একটি ডালাযুক্ত বাক্সের বাহিরের মাপ 12 *cm.*, 10 *cm* , এবং ৪ *cm.* ; ভিতরের তলসমূহের ক্ষেত্রফল 376 *sq. cm* ; কাঠ কত মোটা নির্ণয় কর।

৪। একটি উপঘনকের ভূমির ক্ষেত্রফল 48 *sq cm.* ; উহার উচ্চতা 3 *cm.*, এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 13 *cm* ; ভূমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৫। একটি ঘনকের তলসমূহের ক্ষেত্রফল 346·56 *sq cm.* ; উহার প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৬। একটি উপঘনকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতার অনুপাত 4:3:2 ; তল সমূহের ক্ষেত্রফল 1872 বর্গ ইঞ্চ হইলে আয়তন নির্ণয় কর।

৭। একটি লম্ব প্রিজ্‌মের প্রান্ততলদ্বয় প্রত্যেকটি 3 ইঞ্চ ভূজের বর্গ ; উহার উচ্চতা 1 ফুট হইলে তল-সমূহের সমগ্র ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1936.]

৮। একটি লম্ব প্রিজ্‌মের উচ্চতা ৪ ইঞ্চ এবং ভূমি একটি ত্রিভুজ যাহার বাহুগুলি 5, 5, 6 ইঞ্চ ; উহার ঘনফল এবং পার্শ্বতল সমূহের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1945.]

৯। একটি লম্ব প্রিজ্‌মের ভূমি একটি ট্রাপিজিয়ম, যাহার সমান্তরাল বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য 17 *cm.* এবং 13 *cm.*, এবং তাহাদের মধ্যে ব্যবধান 8 *cm.* ; যদি প্রিজ্‌মের উচ্চতা 100 *cm.* হয়, তবে উহার ঘনফল কত হইবে ?

১০। নিম্নলিখিত লম্ব প্রিজ্‌ম দুইটির পার্শ্বতল সমূহের ক্ষেত্রফলের এবং উহাদের ঘনফলের অনুপাত নির্ণয় কর :—

(ক) ভূমি 8 *cm* বাহুর সুষম ষড়্‌ভুজ এবং উচ্চতা 6 *cm.*

(খ) ভূমি 6 *cm* বাহুর সুষম অষ্টভুজ এবং উচ্চতা 8 *cm*.

১১। একটি লম্ব পিরামিডের ভূমি 16*cm*. বাহুর একটি বর্গ এবং উহার উচ্চতা 15 *cm*. ; পিরামিডটির তির্য্যক তল সমূহের ক্ষেত্রফল এবং ঘনফল নির্ণয় কর।

১২। একটি সুষম ত্রিতলকের প্রান্তিকী 4 ফুট দীর্ঘ ; উহার তল সমূহের ক্ষেত্রফল এবং ঘনফল নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1938.]

১৩। একটি পিরামিডের ভূমি একটি ত্রিভুজ যাহার বাহুগুলি 16, 11, 9 ফুট ; উচ্চতা $10\sqrt{7}$ ফুট হইলে ঘনফল নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1941.]

১৪। একটি লম্ব পিরামিডের ভূমি 12 ফুট বাহুর একটি বর্গ ; উহার ঘনফল 576 ঘনফুট হইলে উচ্চতা নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1943.]

১৫। একটি লম্ব পিরামিডের ভূমি 24 ফুট দৈর্ঘ্য এবং 18 ফুট প্রস্থের একটি আয়তক্ষেত্র ; উহার প্রত্যেক তির্য্যক প্রান্তিকী 17 ফুট হইলে উচ্চতা এবং ঘনফল নির্ণয় কর।

১৬। একটি লম্ব পিরামিডের ভূমি 10 *cm*. বাহুর একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং উহার উচ্চতা 5 *cm*. ; তির্য্যক উচ্চতা, একটি তির্য্যক তলের ক্ষেত্রফল এবং পিরামিডের ঘনফল নির্ণয় কর।

১৭। একটি 15 *cm*. উচ্চ লম্ব পিরামিডের ভূমি 16 *cm*. বাহুর একটি বর্গ ; উহার অক্ষের মধ্যবিন্দু-গামী এবং ভূমির সমান্তরাল একটি সমতল দ্বারা উহাকে দুই ভাগে বিভক্ত করা হইয়াছে ; উভয় অংশের ঘনফল নির্ণয় কর।

১৮। একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 8 ইঞ্চ এবং ভূমির ব্যাসার্দ্ধ 5 ইঞ্চ ; উহার বক্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয় কর।

১৯। একটি চোঙের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 1000 *sq. cm*., এবং ভূমির ব্যাস 20 *cm*. ; উহার উচ্চতা এবং ঘনফল নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1934.]

২০। এক ঘন ইঞ্চ স্বর্ণ হইতে 1000 গজ লম্বা তার প্রস্তুত করিলে তারের ব্যাস কত হইবে ?

২১। 12 *cm.* লম্বা এবং 10 *cm.* ব্যাসের একটি চোঙকে 2 *mm.* ব্যাসের তার জড়াইয়া সম্পূর্ণরূপে ঢাকিয়া ফেলা হইয়াছে; তারের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২২। যদি একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল S, ঘনফল V, অর্দ্ধ-শিরঃকোণ α, উচ্চতা h এবং ভূমির ব্যাসার্দ্ধ r হয়; প্রমাণ কর যে,

(ক) $S = \frac{\pi h^2 \tan\alpha}{\cos\alpha}$, $V = \frac{1}{3}\pi h^3 \tan^2\alpha$;

(খ) $S = \frac{\pi r^2}{\sin\alpha}$, $V = \frac{1}{3} . \frac{\pi r^3}{\tan\alpha}$.

২৩। একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 4 ফুট এবং ভূমির ব্যাসার্দ্ধ 3 ফুট; উহার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল এবং ঘনফল নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1939.]

২৪। 20 ফুট প্রান্তিকীর ঘনক হইতে বৃহত্তম লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু কাটিয়া বাহির করা হইয়াছে; যদি উভয়ের ভূমি একই হয় তবে শঙ্কুর সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২৫। 10 ফুট লম্বা এবং 8 ফুট ব্যাসের একটি চোঙের উভয় প্রান্তে 6 ফুট ব্যাসের 4 ফুট গভীর দুইটি শঙ্কুরূপী গর্ত্ত করা হইয়াছে; অবশিষ্ট অংশের সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২৬। 3, 4 এবং 5 *mm.* ব্যাসার্দ্ধের তিনটি স্বর্ণগোলক গলাইয়া একটি গোলক নির্ম্মাণ করা হইয়াছে; উহার ব্যাসার্দ্ধ নির্ণয় কর। [কঃ বিঃ 1944.]

২৭। 6 ফুট এবং 5 ফুট ব্যাসের দুইটি সমকেন্দ্র গোলকের মধ্যস্থিত দেশের ঘনফল নির্ণয় কর।

২৮। 6 *cm.* ব্যাসের একটি ধাতব গোলক গলাইয়া 4 *cm.* লম্বা এবং 10 *cm.* বহিঃ-ব্যাসের একটি নল নির্ম্মাণ করা হইয়াছে; নলটি কত মোটা?

২৯। 13 *cm.* ব্যাসার্দ্ধের একটি গোলককে কেন্দ্র হইতে 5 *cm.* দূরবর্ত্তী একটি সমতল দ্বারা দুই ভাগে বিভক্ত করা হইয়াছে; উভয় অংশের সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল এবং ঘনফল নির্ণয় কর।

৩০। 24 ফুট ব্যাসের একটি গোলকের কেন্দ্র দর্শকের চক্ষু হইতে 37 ফুট দূরে থাকিলে পৃষ্ঠের কতটা ক্ষেত্রফল দেখিতে পাওয়া যাইবে?

৩১। একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের এবং একটি গোলকের ঘনফল সমান, এবং চোঙের ভূমির ব্যাসার্দ্ধ গোলকের ব্যাসার্দ্ধের সমান; প্রমাণ কর যে, চোঙের উচ্চতা গোলকের ব্যাসের দুই-তৃতীয়াংশ।

৩২। একটি অর্দ্ধগোলকের চারিধারে একটি চোঙ পরিলিখিত এবং চোঙের ভিতর একটি শঙ্কু অন্তর্লিখিত হইয়াছে; সকলেরই ভূমি এবং উচ্চতা এক; প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{3}$ (চোঙের ঘনফল) $= \frac{1}{2}$ (অর্দ্ধ গোলকের ঘনফল) $=$ শঙ্কুর ঘনফল।

উত্তরমালা

১। 25 50 মিটার।

২। 21·42 কিলোগ্রাম।

৩। 1 *cm.*

৪। 12 *cm*, 4 *cm.*

৫। 7·6 *cm.*

৬। 24 *ins*, 18 *ins*, 12 *ins.*

৭। 1 *sq. ft.*

৮। 96 *cu. ins.*; 128 *sq. ins.*

৯। 12,000 *cu. cm.*

১০। (ক) 3 : 4 ; (খ) 717 : 1000.

১১। 544 *sq. cm.*; 1280 *cu. cm.*

১২। $16\sqrt{3}$ *sq. ft*; $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ *cu. ft.*

১৩। 420 *cu. ft.*

১৪। 12 *ft.*

১৫। 8 *cm*; 1152 *cu. cm.*

১৬। 5·8 *cm*; 28·87 *sq. cm.*; 206·25 *cu. cm.*

১৭। 160 *cu. cm*, 1120 *cu. cm.*

১৮। 251·33 *sq. ins.*; 628·32 *cu. ins.*

১৯। 15·9 *cm.*; 5000 *cu. cm.*

২০। 0·006 *in.*

২১। 18·85 মিটার।

২৩। 47.124 *sq. ft.*; 37·699 *cu. ft.*

২৪। 702·46 *cu. ft.*

২৫। 389·56 *sq. ft.*

২৬। 6 *mm.*

২৭। 381·33 *cu. ft.*

২৮। 1 *cm.*

২৯। 1924·46 *sq. cm*, 1106·64 *sq. cm.*; 7125·15 *cu. cm.*, 2077·64 *cu. cm*

৩০। 611·3 *sq. ft.*

CALCUTTA UNIVERSITY PAPERS

CONIC SECTION, CO-ORDINATE AND SOLID GEOMETRY

1939

1. (*i*) Prove that the parameter of any diameter of a parabola is four times the line joining the focus with the vertex of the diameter.

(*ii*) Draw a focal chord of a parabola which is divided by the focus in the ratio 1 : 3.

2. (*i*) Show that the subtangent at any point on a parabola is bisected at the vertex.

(*ii*) The tangent at any point P of a parabola meets the axis in T. Find the locus of the middle point of PT.

3. (*i*) Prove that the tangent at any point of an ellipse makes equal angles with the focal distances of the point.

(*ii*) If SY, the perpendicular on the tangent of an ellipse at P from S, meets S′P produced in Q (S, S′ being the foci), prove that S′ Q is constant.

4. (*i*) Find the equation of the straight line which cuts off an intercept -3 from the y-axis and is inclined at an angle of 45° to the positive direction of the x-axis.

Draw a sketch of the straight line and show from geometrical considerations that this straight line is at right angles to the straight line $x+y=2$.

(*ii*) Find the equation to the ellipse referred to its axes as axes of co-ordinates which passes through the points (2, 2) and (3, 1). Find also its eccentrcity.

5. (*i*) If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, show that it is also perpendicular to the plane in which they lie.

(*ii*) Prove that all points in space equidistant from two given points lie in a plane.

6. (*i*) Prove that if a staight line is perpendicular to a plane, any plane passing through the perpendicular is also perpendicular to the given plane.

(*ii*) Find the volume and the area of the slanting surface of a right circular cone of height 4 feet and the radius of whose base is 3 feet (π being equal to $\frac{22}{7}$).

1940

1. (*i*) Prove that the ordinate of any point on a parabola to any diameter is a mean proportional between the parameter of the diameter and the abscissa of the point.

(*ii*) AP is any chord of a parabola passing through the vertex A ; PR is drawn perpendicular to AP to meet the axis at R. If PN be the ordinate of P, show that NR is equal to the latus rectum.

2. (*i*) Prove that the portion of the tangent at any point of a parabola intercepted between that point and the directrix subtends a right angle at the focus.

(*ii*) If from any point on the tangent at P of a parabola perpendiculars OU and OI are drawn to SP and the directrix respectively, show that SU = OI.

3. (*i*) Prove that if any chord QQ' of an ellipse intersects the directrix in D, SD bisects the exterior angle between SQ and SQ′.

(*ii*) The straight lines joining the vertices of an ellipse to any point P on the curve are produced to meet a directrix at D and D′. If S be the focus corresponding to the directrix, show that ∠DSD′ is a right angle.

4. (*i*) For what values of m will be the three lines

$$y=3x-1,\ 2y=x+3,\ 3y=mx+4 \text{ be concurrent ?}$$

(*ii*) Find the equation to the circle whose centre is at the origin and which meets the straight line $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$, on the axis of y.

5. (*i*) If two straight lines are parallel and if one of them is perpendicular to a plane, show that the other is also perpendicular to the same plane.

(*ii*) AB, AC are two straight lines intersecting at right angles ; and from B a perpendicular BD is drawn to the plane of AB, AC. Show that AD is perpendicular to the line AC.

6. (*i*) Prove that the projection of a straight line on a plane is itself a straight line.

(*ii*) A right prism stands on a triangular base whose sides are 17 cm , 10 cm., 9 cm., and the height is 10 cm. Find the volume and the whole surface.

1941

1. (*i*) Prove that the locus of the middle points of any system of parallel chords of a parabola is a straight line parallel to the axis.

(*ii*) The difference between the segments of any focal chord is equal to the parallel chord through the vertex.

2. (*i*) Prove that the ellipse is symmetrical with respect to the minor axis.

(ii) If N be the foot of the ordinate of any point P on an ellipse and NQ be drawn parallel to the line AB meeting the minor axis in Q, show that $PN^2 = BQ . B'Q$ where AA' and BB' are the major and minor axes respectively.

3. (i) Prove that the tangent at any point of an ellipse makes equal angles with the focal distances of the point.

(ii) If SY and S′Y′ be the perpendiculars on the tangent at P, from the two foci S and S′ of an ellipse and PN be the ordinate of P, show that PN bisects the angle YNY′.

4. (i) Find the point of intersection of the lines

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1, \text{ and } \frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1.$$

Find also the equation of the straight line through this point of intersection cutting both the axes at an angle of 45°.

(ii) Find the eccentricity and position of the foci of the ellipse $3x^2+4y^2=48$.

5. (i) If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, show that it is also perpendicular to the plane in which they lie.

(ii) Find the locus of a point in space equidistant from three given non-collinear points.

6. (i) Prove that two intersecting planes cut one another in a line and in no point outside it.

(ii) Determine the volume of the pyramid whose height is $10\sqrt{7}$ ft., and which stands on a triangle of sides 16 ft., 11 ft., and 9 ft.

1942

1. (*i*) Prove that the parameter of any diameter of a parabola is four times the line joining the focus with the vertex of the diameter.

(*ii*) PSp is the focal chord of a parobola with the focus at S, bisected by the diameter KBV, K being its point of intersection with the directrix. Show that $KS^2 = SP. Sp.$

2. (*i*) If any chord QQ′ of an ellipse intersects the directrix in D, show that SD bisects the exterior angle between SQ and SQ′.

(*ii*) Prove that the intercept made on either directrix by straight lines joining the extremities of a focal chord to any point on an ellipse, subtends a right angle at the corresponding focus.

3. (*i*) Prove that the portion of the tangent at any point of an ellipse, intercepted between that point and the directrix subtends a right angle at the focus, and *conversely*.,

(*ii*) The tangent at any point P of an ellipse meets the directrix in Z and the latus rectum in H. Prove that $HS = e.SZ$, where e is the eccentricity of the ellipse.

4. (*i*) Find the equation of the straight line passing through the point (3, 2) and the intersection of the lines

$$3x + y - 5 = 0$$
$$x + 5y + 3 = 0.$$

Find also the area of the triangle cut off from the co-ordinate axes by this line.

(*ii*) An ellipse whose axes ie a ong the co-ordinate axes is of eccentricity $\frac{4}{5}$ and passes through the point $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$. Determine its equation.

5. (*i*) If two straight lines are parallel and if one of them is perpendicular to a plane, show that the other also is perpendicular to the same plane.

(*ii*) From an external point P, PO is drawn perpendicular to the plane XY and L M is any straight line in the plane XY. If PQ be drawn perpendicular to LM, show that OQ is also perpendicular to LM.

6. (*i*) Prove that all straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point are coplanar.

(*ii*) Find the lateral surface and the volume of a right circular cone, 15 ft. high, the radius of whose base is 8 ft.

1943

1. (*i*) Prove that the ordinate of any point of a parabola is a mean proportional between the abscissa of the point and the latus rectum.

(*ii*) PN is the ordinate of a parabola; a straight line drawn parallel to the axis bisects PN and cuts the curve in Q; NQ meets a line through the vertex A at right angles to the axis in T. Prove that 3 AT=2PN.

2. (*i*) In an ellipse prove with the usual notation, that $CA^2=CS.CX$ and $CB^2=SA.SA'$.

(*ii*) The distance between the focus and the directrix of an ellipse is 16 inches and its eccentricity is $\frac{3}{5}$. Obtain the lengths of the principal axes.

3. (*i*) Prove that the tangent at any point of an ellipse makes equal angles with the focal distances of the point.

(*ii*) If SY, the perendicular on the tangent at any point P of an ellipse, meets S′P produced in Q, (S and S′ being the focii), prove that S′Q is always constant in length.

4. (*i*) Find the point of intersection of the lines

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \text{ and } \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1,$$

and determine the co-ordinates of the focus of the parabola, $y^2=2ax$, which passes through this point.

5. (*i*) If a straight line is perpendicular to a plane, show that any plane passing through the perpendicular is also perpendicular to the given plane.

(*ii*) If two intersecting planes are each perpendicular to a third plane, prove that their line of section is also perpendicular to the plane.

6. (*i*) Show that two intersecting planes cut one another in a straight line and in no point outside it.

(*ii*) A right pyramid stands on a square base of side 12 ft. Find the height of the pyramid if its volume is 576 cu.ft.

1944

1. (*a*) Prove that the latus rectum of a parabola is four times the focal distance of the vertex.

(*b*) Shew that the circle described on the latus rectum of a parabola as diameter touches the directrix at the point where the axis meets it.

2. (*a*) Prove that the sum of the focal distances of any point on an ellipse is constant and equal to the major axis.

(*b*) If two ellipses have a common focus and their major axes equal, show that they cannot intersect in more than two points.

(*c*) For the ellipse $9x^2+25y^2=225$, find e.

3. (*a*) Prove that the middle points of parallel chords of an ellipse lie on a straight line passing through the centre.

(*b*) Find the eccentricity of the ellipse whose latus rectum is 4 inches and the distance of the vertex from the nearest focus is 1·5 inches.

4. (*a*) Obtain the equation of the straight line which makes intercepts 2 and 1 on the co-ordinate axes.

(*b*) Find the co-ordinates of the points where the line $x-5y+6=0$ meets the parabola $y^2=x$.

(*c*) Given the base and the difference of the squares of the sides of a triangle. Find the equation to the locus of the vertex.

5. (*a*) Prove that the projection of a straight line upon a plane is itself a straight line.

(*b*) If a straight line is parallel to a plane, show that it is parallel to its projection on that plane.

6. (*a*) Prove that all straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point of it are coplanar.

(*b*) Three solid golden spherical beads of radii 3, 4 and 5 millimetres are melted into one single solid spherical bead. Find the radius of the single spherical bead.

1945

1. (*a*) Find the radius of the circle whose center is the point $(1, -2)$ and which passes through the point of intersection of the straight lines $3x+y=14$ and $2x+5y=18$.

(*b*) Find the equation of the ellipse, referred to its axes as the axes of x and y respectively, which passes through the points $(-3, 1)$ and $(2, -2)$. Find also its eccentricity.

2. (*a*) Prove that the locus of the middle points of a system of parallel chords of a parabola is a straight line parallel to the axis.

(*b*) AP is any chord through the vertex A of a parabola and PE is drawn at right angles to AP, meeting the axis in E. Prove that AE is equal to the focal chord parallel to AP.

3. (*a*) Prove that the ordinate of any point on a parabola with respect to any diameter is a mean proportional to its parameter and the abscissa of the point with respect to the diameter.

(*b*) Through a given point draw a chord of a parabola so that it is divided in a given ratio at the point.

4. (*a*) Prove that the ellipse is symmetrical with respect to the minor axis and has a second focus and directrix.

(*b*) Given an ellipse and its centre, find the axes.

5. (*a*) Find the volume and the area of the lateral surface of a right prism 8 inches long standing on an isosceles triangle each of whose equal sides is 5 inches and the other side 6 inches.

(*b*) Prove that if a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, it is also perpendicular to the plane in which they lie.

6. (*a*) Prove that if two straight lines are parallel, and if one of them is perpendicular to a plane then the other is also perpendicular to the same plane.

(*b*) Prove that if two straight lines are both perpendicular to the same plane, they are parallel to one another.

1946

1. (a) Find the equation of the straight line which passes through the point (1, 2) and the point of intersection of the lines $x+3y+1=0$, $2x+7y+3=0$.

(b) If the line $y=3x+1$ touch the parabola $y^2=4ax$, find the length of the latus rectum.

2. (a) Prove that the parameter of any diameter of a parabola is four times the line joining the focus with the vertex of the diameter.

(b) Show that the latus rectum is the shortest focal chord of a parabola.

3. (a) Prove that the subtangent at any point of a parabola is bisected at the vertex.

(b) If the tangent at any point P of a parabola meets the tangent at the vertex A in Y, prove thaf $AY^2=AS.AN$, where S is the focus and PN is the ordinate of P.

4. (a) Prove that the tangent at any point of an ellipse makes equal angles with the focal distances of the point.

(b) Show that the tangent at any point of an ellipse makes greater angle with the focal distance than with the perpendicular on the directrix.

5. (a) Find the volume of the pyramid in which the base is a triangle whose sides are 8 cm., 15 cm., and 17 cm., and the height is 12 cm.

(b) Prove that all straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point are coplanar.

6. (a) Of all straight lines drawn from an external point to a plane, prove that the perpendicular is the shortest.

(*b*) If three points A, B, C on a plane are equidistant from an external point O, show that the foot of the perpendicular drawn from O on the plane is the centre of the circle which can be drawn through A, B, C.

1947

1. (*a*) Find the equation of the straight line passing through the point (3,5) and parallel to the line $4x-3y+1=0$.

(*b*) Obtain the equation of the circle whose centre is the point (2,3) and which passes through the intersection of the lines $3x-2y-1=0$ and $4x+y-27=0$.

(*c*) Show that the line $4x-2y+3=0$ touches the parabola $y^2=12x$ and find the co-ordinates of the point of contact.

2. (*a*) Show that the ordinate of any point on a parabola with respect to any diameter is a mean proportional to its parameter and the abscissa of the point with respect to the diameter.

(*b*) If any chord QQ' of a parabola be bisected by the diameter BV and QD is the perpendicular from Q to BV, prove that $QD^2=4\ AS.\ BV$. The letters have their usual significance.

3. (*a*) Show that the tangent at any point of a parabola bisects the angle between the focal distance of the point and the perpendicular drawn from the point on the directrix.

(*b*) Find the locus of the foot of the perpendicular drawn from the focus on any tangent to a parabola.

4. (*a*) Show that the middle points of parallel chords of an ellipse lie on a straight line passing through the centre.

(*b*) If one diameter of an ellipse bisects chords parallel to a second, show that the second diameter will bisect all chords parallel to the first.

5. (*a*) If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, show that it is also perpendicular to the plane in which they lie.

(*b*) Find the locus of a point in space equidistant from two given points.

6. (*a*) If a straight line is perpendicular to a given plane, show that any plane passing through the perpendicular is also perpendicular to the given plane.

(*b*) Show how to draw a plane parallel to the base of a right circular cone so that it divides the cone into two parts of equal surfaces.

1948

1. (*a*) If the straight line $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, passes through the point of intersection of the lines $2x-y=1$ and $3x-4y+6=0$ and is parallel to the line $4x+3y-6=0$, find a and b.

(*b*) Find the eqation of the ellipse (referred to its axes as the axes of x and y respectively) which passes through the point $(-3, 1)$ and has the eccentricity $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

2. (*a*) Prove that the locus of the middle points of a system of parallel chords of a parabola is a straight line parallel to the axis.

(*b*) Prove that the difference between the segments of any chord of a parabola made by the axis is equal to the parallel chord through the vertex.

3. (*a*) Show that the subtangent at any point of a parabola is bisected at the vertex.

(*b*) If the tangent at P to a parabola meets the tangent at the vertex in Y, prove that $AY^2 = AS.AN$.

4. (*a*) If any chord QQ' of an ellipse intersects the directrix in D, prove that SD bisects the exterior angle between SQ and SQ'.

(*b*) Prove that the intercept made on the directrix by the lines joining the extremities of a given chord of an ellipse to any point on the curve, subtends a constant angle at the focus.

5. (*a*) Prove that all straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point are co-planar.

(*b*) Prove that there cannot be more than three mntually perpendicular straight lines in space meeting at a point.

6. Show that the projection of a straight line on a plane is itself a straight line.

(*b*) Find the volume of the pyramid in which the base is a triangle whose sides are 8 cm., 15 cm., and 17 cm., and the height is 12 cm.

1949

1. (*a*) The straight line $y = mx + c$ cuts the parabola $y^2 = 12x$ in two coincident points and is parallel to the line $5y + 3x + 25 = 0$. Find m and c.

(*b*) The ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, passes through the point of intersection of the lines $7x + 13y - 87 = 0$ and $5x - 8y + 7 = 0$ and its latus recum is $\frac{32}{5}\sqrt{2}$; find a and b.

2. (*a*) Prove that the parameter of any diameter of a parabola is four times the line joining the focus with the vertex of the diameter.

(*b*) Show that the parameter of any diameter of a parabola is greater than the latus rectum.

3. (*a*) If any chord QQ' of a parabola intersects the directrix in D, show that SD bisects the exterior angle between SQ and SQ'.

(*b*) P is any point on a parabola and PA is produced to meet the directrix in E, (A being the vertex) and PF is drawn perpendicular to the directrix. Show that the angle ESF is a right angle.

4. (*a*) Prove that the tangent at any point of an ellipse makes equal angles with the focal distances of the point.

(*b*) If SY, the perpendicular on the tangent at any point P on an ellipse (whose foci are S and S') meets $S'P$ produced in Q, show that $S'Q$ is of constant length.

5. (*a*) If two straight lines are parallel, and if one of them is perpendicular to a plane, prove that the other is also perpendicular to the same plane.

(*b*) If two straight lines are both perpendicular to the same plane, prove that they are parallel to one another.

6. (*a*) If a straight line is perpendicular to a plane, show that any plane passing through the perpendicular is also perpendicular to the given plane.

(*b*) A lump of clay in the form of a solid sphere is converted into a right circular cylinder of height 16 inches. Find the radius of the base of the cylinder supposing it to be equal to the radius of the sphere.

1950

1. The diagonals of square lie along the co-ordinate axes, and their length is 2 units. Find the equations of the four sides (produced) of the square.

A circle has its centre on the line $2x-3y=0$ and passes through the points (4, 3), $(-2, 5)$. Find its equation.

2. Show that the subtangent at any point of a parabola is bisected at the vertex.

Verify the above theorem when the parabola is $y^2=12x$ and the tangent is $4x-2y+3=0$, being given that it touches the parabola at the point $(\frac{3}{4}, 3)$.

3. In an ellipse show that

$$CS.\ CX=CA^2,$$

where C is the center, S is a focus, A is the corresponding vertex and X the point where the line CS meets the correspon-ing directrix of the ellipse.

Verify the above theorem when the ellipse is $x^2+2y^2=2$.

4. Show that if a straight line is perpendicular to each of two intersecting lines at their point of intersection, it is perpendicular to the plane in which they lie.

If AB is perpendicular to a plane and if from B, the foot of the perpendicular, the line BE is drawn perpendicular to a line CE in the plane, show that CE is perpendicular to the plane of AE, BE.

5. What is meant by the *dihedral angle* between two planes ? How is it measured ? What is a solid angle ?

How many solid spheres, each 6 c.m., in diameter, could be moulded from a solid metal cylinder whose length is 45 c.m., and diameter 4 c.m. ?

If the cylinder of the above dimensions be hollow, how many circular discs of diameter 6 c.m. may be made out of it ?